RÉPUBLIQUE FRANÇAISE
Liberté
Égalité
Fraternité

METEO FRANCE
À VOS CÔTÉS, DANS UN CLIMAT QUI CHANGE

CONCOURS POUR LE RECRUTEMENT DE TECHNICIENS SUPÉRIEURS DE LA MÉTÉOROLOGIE DE PREMIÈRE CLASSE,

SPÉCIALITÉ « EXPLOITATION »

(CONCOURS INTERNE ET EXTERNE)

SESSION 2024

****

ÉPREUVE ÉCRITE OBLIGATOIRE N° 2 :

MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE-CHIMIE

Durée : 3 heures — Coefficient : 5

La rigueur, le soin et la clarté apportés à la rédaction des réponses seront pris en compte dans la notation. L'usage de la calculatrice est autorisé. **L'utilisation de toute documentation est strictement interdite.**

Cette épreuve se compose de deux parties :

- Partie A : Mathématiques (10 points) – pages 2 à 5
  réponses à indiquer sur la feuille en annexe

- Partie B : Physique-Chimie (10 points) – pages 6 à 12
  réponses à indiquer sur la feuille en annexe

Ce sujet comporte 12 pages (page de garde incluse).

Météo-France
73, avenue de Paris - 94165 Saint-Mandé CEDEX - France
www.meteofrance.fr @meteofrance

PARTIE A : MATHÉMATIQUES

Les questions 1 à 10 sont sous forme de QCU (questionnaire à choix unique).
Pour chacune de ces questions, une seule réponse est exacte.
Aucune justification n'est attendue.
Les questions 11 à 13 nécessitent une réponse rédigée.

Une bonne réponse rapporte 1 point, une mauvaise réponse entraîne une pénalité de 0,25 point, une absence de réponse entraîne 0 point à la question.

Une feuille réponse est fournie avec la copie sur laquelle toutes les réponses aux 13 questions doivent être reportées.

EXERCICE 1

Question 1 : $-x^2 + 16x - 72$ est égal à :

a) $-(8 - x)^2$

b) $(-8 + x)^2$

c) $(8 - x)^2$

d) $(-8 - x)^2$

e) aucune des propositions précédentes

Question 2 : Quelle proposition est vraie ?

a) « Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $x < y$ » est équivalent à « il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $x < y$ »

b) Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $x < y$

c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $x < y$

d) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $x < y$

e) aucune des propositions précédentes.

Question 3 : Pour quelle(s) valeur(s) de m l'équation $x^2 + mx + m = 0$ admet-elle une unique solution ?

a) pour $m = 2$

b) pour $m = 1$ et $m = -1$

c) pour aucune valeur de m

d) pour $m = 0$ et $m = 4$

e) aucune des propositions précédentes.

Question 4 : Quelle est l'affirmation correcte ?

a) La fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$ sur $]0 ; +\infty[$ est dérivable sur cet intervalle et $f'(x) = \frac{1+x}{x^2}$.

b) La fonction f définie par $f(x) = x \ln x - x$ sur $]0 ; +\infty[$ est dérivable sur cet intervalle et $f'(x) = -\ln x$.

c) La fonction f définie par $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ sur $]0 ; +\infty[$ est dérivable sur cet intervalle et $f'(x) = \frac{1+\ln x}{x^2}$.

d) La fonction f définie par $f(x) = \ln(x^2 + x - 2)$ sur $]-\infty ; -2[$ et $]1 ; +\infty[$ est dérivable sur cet intervalle et $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x-2}$.

e) aucune des propositions précédentes.

Question 5 : Soit la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3e^{2x}}{1+e^x}$ et f' sa fonction dérivée, alors :

a) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

b) $f'(x) = \frac{6e^{2x}}{(1+x)^2}$

c) $f(x) = \frac{3e^2}{e^{-x}+1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

d) $f'(0) = 9$

e) aucune des propositions précédentes.

Question 6 : F est une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(5x) + x$ si :

a) $F(x) = \frac{1}{5}\sin(5x) + \frac{x^2}{2} + 1$

b) $F(x) = 5\sin(5x) + 1$

c) $F(x) = -5\sin(5x) + \frac{x^2}{2} + 1$

d) $F(x) = -\frac{1}{5}\sin(5x) + \frac{x^2}{2} + 1$

e) aucune des propositions précédentes.

Question 7 : Soit la fonction définie sur]0 ; +∞[par $f(x) = 2 + \frac{3}{x}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.

L'aire comprise entre l'axe des abscisses et la courbe (C_f) sur l'intervalle [1 ; 5] est :

a) 5 + ln(15) – ln(3) unités d'aire

b) 8 + 3 ln(5) unités d'aire

c) 51,9 cm²

d) 8 – 3 ln(5) cm²

e) aucune des propositions précédentes.

Question 8 : Dans un enclos vivent 50 hamsters mâles et 75 hamsters femelles. Billy choisit un animal au hasard, regarde son sexe et le remet dans l'enclos. Il recommence 5 fois l'expérience. On note X le nombre de hamsters mâles sur les cinq que Billy a attrapés.

a) $P(X = 0) = (\frac{2}{5})^5$

b) $P(X = 5) = 1 - (\frac{3}{5})^5$

c) $E(X) = 2$

d) $P(X = 2) < P(X = 4)$

e) aucune des propositions précédentes.

Question 9 : Dans un repère orthonormé de l'espace, soient le plan (P) : $2x + y - z + 5 = 0$ et la droite (d) de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 - t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$.

a) La droite (d) et le plan (P) ne sont pas sécants.

b) La droite (d) est incluse dans le plan (P).

c) La droite (d) et le plan (P) se coupent au point $E(\frac{-1}{3}; \frac{9}{3}; \frac{10}{3})$.

d) La droite (d) et le plan (P) se coupent au point $F(\frac{4}{3}; \frac{-1}{3}; \frac{22}{3})$.

e) aucune des propositions précédentes.

Question 10 : Dans un repère orthonormé de l'espace, soient trois points A(1 ; -1 ; -1), B(1 ; 1 ; 1) et C(0 ; 3 ; 1). Une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ arrondie au dixième de degré est égale à :

a) 22,2°
b) 0,4°
c) 67,8°
d) 1,2°
e) aucune des propositions précédentes.

EXERCICE 2

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel : $u_{n+1} = \dfrac{1+3u_n}{3+u_n}$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

Question 11 : Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel, on a : $u_n > 1$.

Question 12 : Établir que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}$.

Question 13 : Si la suite (u_n) converge, en déterminer la limite, sinon prouver qu'elle diverge. Justifier la réponse.

PARTIE B : PHYSIQUE-CHIMIE

L'épreuve est composée de 12 questions.

Parfois plusieurs réponses sont possibles. Une mauvaise réponse entraîne une pénalité. Le minimum de points attribués à une question est égal à 0 en cas d'erreurs multiples.

Les réponses aux questions sont apportées sur la feuille réponse fournie avec la copie. Aucune justification n'est attendue.

Question 14 : (0,5 point)

La longueur d'onde d'une radiation lumineuse monochromatique de fréquence 2×10^6 GHz vaut :

a) 0,15 µm

b) 300 nm

c) 15 nm

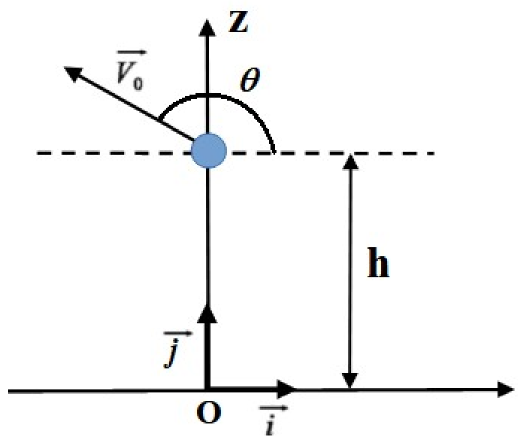
d) 5000 m

e) $1{,}5 \times 10^{-5}$ cm

Question 15 : (0,5 point)

Un ballon de masse m = 6,0 kg est lancé d'une hauteur h = 2,0 m au dessus du sol avec une vitesse initiale de valeur V_0 = 7,0 $m.s^{-1}$. Le vecteur $\vec{V}_0$ fait un angle θ avec l'horizontale. Le mouvement se fait dans un plan vertical auquel on associe le repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$). On néglige les frottements de l'air et on donne l'accélération de la pesanteur : g = 10 $m.s^{-2}$.

Pour θ = 150°, l'équation horaire de la vitesse suivant Oz s'écrit :



a) $V_z = - 5 \times t + 6{,}06$

b) $V_z = - 10 \times t + 3{,}5$

c) $V_z = 10 \times t + 0{,}17 \times V_0$

d) $V_z = 10 \times t + 3{,}5$

e) $V_z = - g \times t + V_0$

f) aucune des propositions précédentes

Question 16 : (1 point)

Une personne sur un traîneau se déplace sur une piste horizontale. On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen et on étudie le mouvement du système $\{$traîneau + personne$\}$, de masse totale 220 kg, qui sera assimilé à un point matériel dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Pendant la phase de mise en mouvement, le traîneau est tracté par des chiens à partir de l'origine O du repère avec une force de valeur T = 1500 N et de direction parallèle à la piste. Les forces de frottements avec l'air et avec le sol sont négligés. On prendra $g = 9{,}8\ N.kg^{-1}$.

Pendant la phase d'accélération, on détermine la valeur de l'accélération du système a et la valeur de la réaction de la piste R.

a) $a = 0{,}95\ m.s^{-2}$ et R = 2200 N

b) $a = 8{,}6\ m.s^{-2}$ et R = 220 N

c) $a = 6{,}8\ m.s^{-2}$ et R = 2200 N

d) $a = 0{,}68\ m.s^{-2}$ et R = 2200 N

e) aucune des propositions précédentes

Question 17 : (1 point)

La plus grande lune de Saturne et le deuxième plus grand satellite naturel du système solaire, est connue sous le nom de Titan. Son rayon orbital moyen est de $1{,}22.10^9$ m et sa période de révolution est de 15,95 jours. Alors que l'autre lune connue de Saturne, Hypérion, a une orbite dont le rayon moyen est de $1{,}48.10^9$ m. En utilisant la troisième loi de Kepler du mouvement planétaire, quelle est la période orbitale d'Hypérion en jours ?

a) 19 jours

b) 112 jours

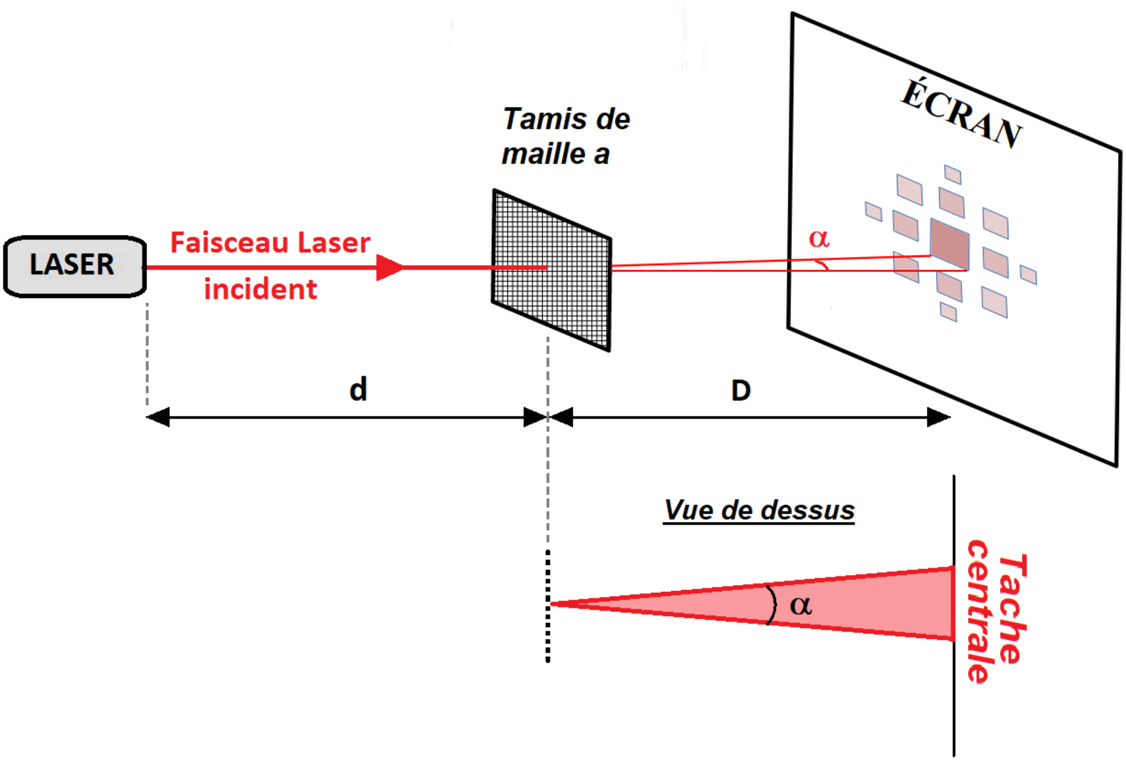
c) 28 jours

d) 40 jours

e) aucune des propositions précédentes

Question 18 : (1,5 points)

On s'intéresse au phénomène de diffraction observé à travers un tamis de laboratoire (grille à maille carrée) de côté a. Le résultat observé est identique à celui obtenu lors de la superposition de deux fentes allongées de même largeur et disposées perpendiculairement l'une par rapport à l'autre. En effet, en dirigeant vers ce tamis un faisceau LASER monochromatique de longueur d'onde dans le vide λ_0 = 532 nm et se propageant dans l'air, on observe sur un écran une figure de diffraction dont la tache centrale est un carré de côté L = 2,66 cm.



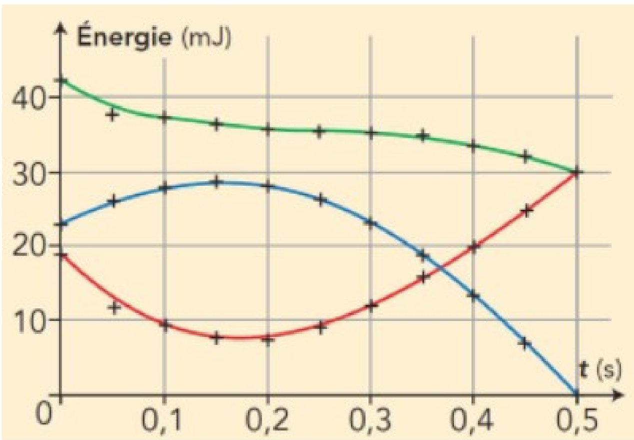
Le LASER est placé à une distance d = 40 cm du tamis ; la distance entre le tamis et l'écran vaut D = 2,0 m. Dans l'approximation des petits angles, la dimension a d'une maille du tamis est :

a) 16 µm
b) 80 µm
c) 800 µm
d) 0,08 mm
e) 0,8 mm

<u>Question 19</u> : (0,5 point)

Un volant de badminton, assimilé à un point matériel de masse 5,0 g, est lancé à l'aide d'un lanceur avec une vitesse initiale $\vec{V}_O$ faisant un angle de 45° avec l'horizontale.

On a représenté ci-dessous les évolutions des énergies du volant de badminton au cours du temps. On donne g = 10 m.s^{-2}.



A la date t = 0,15 s, le volant atteint l'altitude de :

a) 0,0056 m
b) 0,00056 m
c) 0,56 m
d) 1 m
e) aucune des propositions précédentes

<u>Question 20</u> : (1 point)

Une chambre dont les dimensions sont 4,5 m × 3,5 m × 2,5 m, est à une température de 17°C. On souhaite, à l'aide d'un radiateur électrique, porter la température de la pièce à 24°C.

<u>Données</u> :

Masse volumique de l'air : ρ air = 1,21 kg.m^{-3}

Capacité thermique massique de l'air : c_{air} = 718 J·kg^{-1}·K^{-1}

En faisant l'hypothèse que l'énergie fournie par le système de chauffage ne sert qu'à chauffer l'air de la pièce, le transfert thermique Q entre le radiateur et l'air de la pièce vaut :

a) 2,4 × 10^{5} J
b) 2,4 × 10^{4} J
c) 4,2 × 10^{5} J
d) 4,2 × 10^{4} J
e) aucune des propositions précédentes

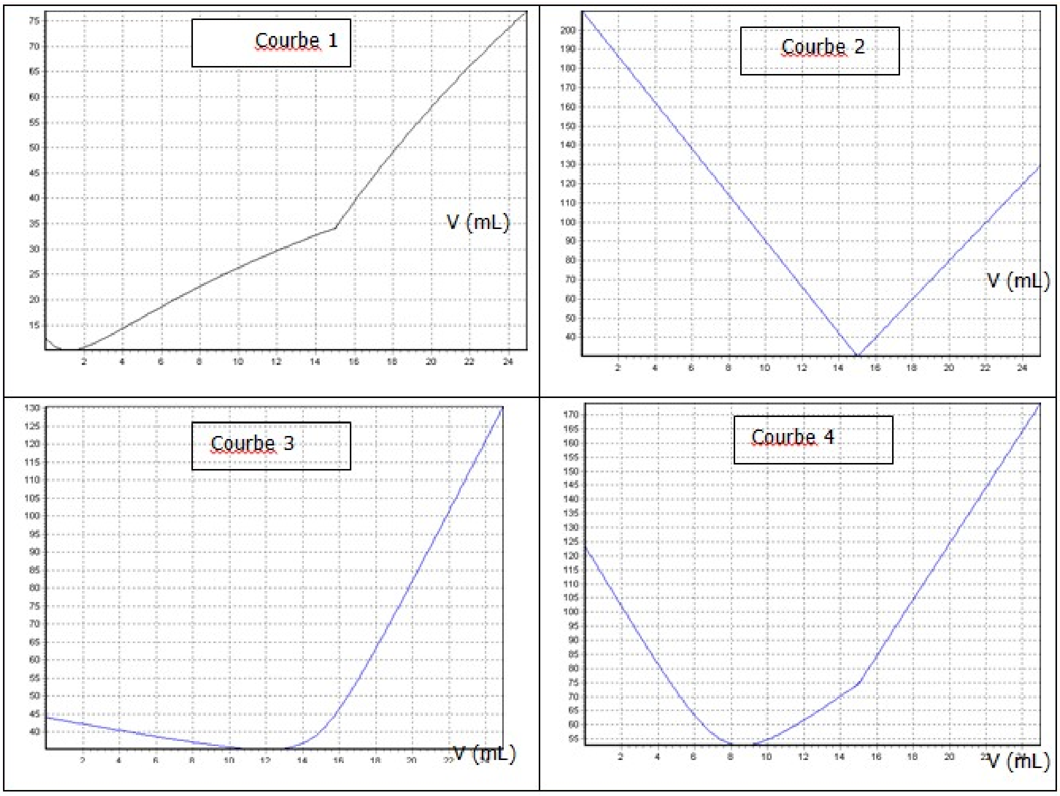
<u>Question 21</u> : (0,5 point)

On considère un condensateur plan constitué par deux armatures P_A et P_B distantes de d = 2 cm aux bornes desquelles est appliquée une tension U_{BA} de 200 V. Le travail de la force électrostatique s'exerçant sur un électron de charge q = - 1,60 × 10^{-19} C se déplaçant de l'armature P_A à l'armature P_B vaut :

a) -3,2.10^{-21} J
b) 3,2.10^{-17} J
c) 3,2.10^{-21} J
d) -32.10^{-7} nJ
e) -3,2.10^{-17} J
f) 32.10^{-7} nJ

<u>Question 22</u> : (0,5 point)

On effectue le titrage conductimétrique d'une solution d'acide ascorbique de concentration molaire voisine de l'ordre de 5 × 10^{-3} mol.L^{-1} par une solution d'hydroxyde de sodium de concentration c'_B = 1,00 × 10^{-1} mol.L^{-1}.



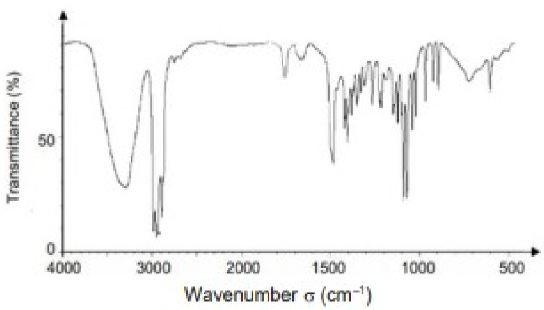
<u>Allures de courbes de titrage conductimétriques</u>

Parmi les allures de courbes proposées ci-dessus, la courbe qui peut correspondre au titrage conductimétrique de l'acide ascorbique par la solution d'hydroxyde de sodium est :

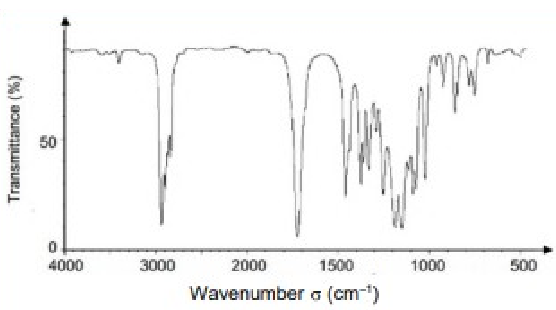
a) courbe 3
b) courbe 2
c) courbe 1
d) courbe 4
e) aucune des propositions précédentes

<u>Question 23</u> : (1 point)

On dispose de deux dentifrices ayant deux arômes différents: l'un est au menthol (arôme menthe) et l'autre est à la fraise. Afin d'identifier le dentifrice au menthol, on étudie les spectres infrarouges des deux dentifrices. Un extrait des tables IR contenant les bandes caractéristiques est également présenté ci-dessous.



Dentifrice n°1

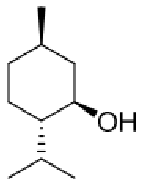


Dentifrice n°2

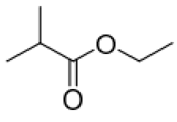
Liaison	Nombre d’onde (cm^{-1})
O - H	3150-3650
N - H	3100-3500
C – H alcène	3030-3100
C – H alcane	2850-2970
C = O ester	1735-1750
C = O cétone	1700-1740
C = C alcène	1620-1690

Bandes caractéristiques en IR

Formules topologiques des deux arômes recherchés :



menthol (menthe)



2- MPE (fraise)

a) le dentifrice 1 contient un arôme de fraise et le dentifrice 2 un arôme de menthe

b) le dentifrice 1 contient un arôme de menthe et le dentifrice 2 un arôme de fraise

c) la formule topologique du 2- MPE est : $C_6H_{11}O_2$

d) le 2- MPE contient une fonction ester

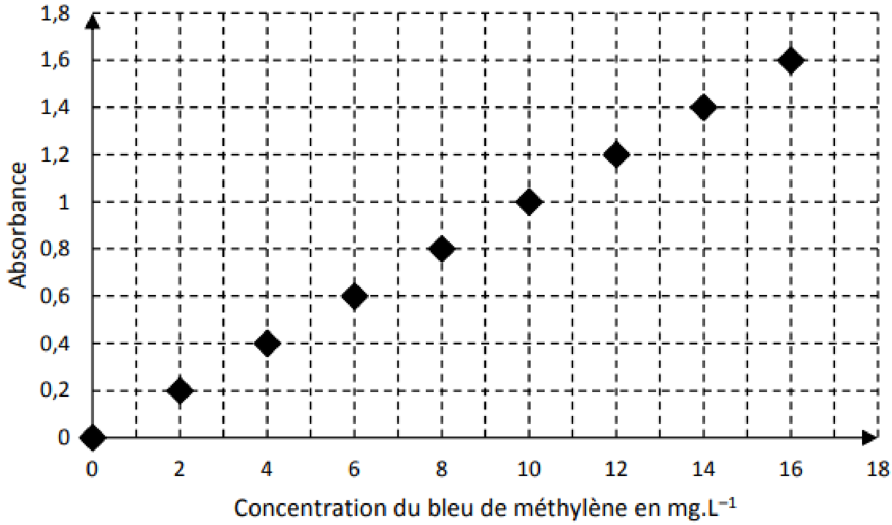
e) le 2- MPE contient une fonction cétone

Question 24 : (1 point)

Une solution aqueuse antiseptique de bleu de méthylène (colorant bleu faiblement biodégradable) est utilisée afin de prévenir les infections dans les aquariums. L’excès de bleu de méthylène est ensuite éliminé par des « filtres » à charbon actif (poudre noire dont les pores retiennent des molécules organiques). C’est le phénomène d’adsorption. On évalue la capacité d’adsorption du charbon actif à l’aide d’un dosage par étalonnage.

Protocole opératoire :

- A l’aide de solutions étalon de bleu de méthylène, on trace la courbe d’étalonnage ci-dessous à la longueur d’onde : λ = 650 nm
- On mesure l’absorbance A d’un échantillon d’eau polluée en bleu de méthylène et on trouve : $A_{polluée}$ = 1,5
- On prélève un volume V de 50,0 mL d’eau polluée et on y ajoute 100,0 mg de charbon actif. On agite et on filtre le mélange.
- On mesure l’absorbance A de la solution filtrée après traitement au charbon actif et on trouve : $A_{traitée}$ = 0,2



Absorbance en fonction de la concentration en bleu de méthylène, à λ = 650 nm

la masse ma de colorant adsorbée par gramme de charbon actif vaut :

a) 12 mg
b) 8 g
c) 6,5 mg
d) 0,12 g
e) aucune des propositions précédentes

<u>Question 25</u> : (1 point)

L'étiquette d'un flacon contenant une solution commerciale d'ammoniac comporte les indications suivantes :

pourcentage massique : 28 % et densité : d = 0,95.

<u>Données</u> :

Masse molaire de l'ammoniac : M = 17,0 $g.mol^{-1}$;

masse volumique de l'eau : ρ_{eau} = 1000 $g.L^{-1}$

La concentration molaire de l'ammoniac dans la solution est de :

a) 11 $mol.L^{-1}$
b) 11 $mmol.L^{-1}$
c) 156 $mmol.L^{-1}$
d) 15,6 $mol.L^{-1}$
e) 0,56 $mol.L^{-1}$
f) aucune des propositions précédentes