RÉPUBLIQUE FRANÇAISE
Liberté
Égalité
Fraternité

METEO FRANCE
À VOS CÔTÉS, DANS UN CLIMAT QUI CHANGE

CONCOURS INTERNE POUR LE RECRUTEMENT D'ÉLÈVES INGÉNIEURS DES TRAVAUX DE LA MÉTÉOROLOGIE

SESSION 2024

****

ÉPREUVE ÉCRITE OBLIGATOIRE

MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures — Coefficient : 4

La rigueur du raisonnement et la clarté de la présentation seront prises en compte dans la notation.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'utilisation de toute documentation (dictionnaire, support papier, traducteur, téléphone portable, assistant électronique, etc) est strictement interdite.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

L'épreuve de Mathématiques comprend quatre exercices indépendants de poids équivalents.

Exercice 01 : 5 points
Exercice 02 : 5 points
Exercice 03 : 5 points
Exercice 04 : 5 points

Cette épreuve comporte 4 pages (page de garde incluse).

Exercice 01

Pour tout entier naturel n, on définit sur l'intervalle $J = [1, +\infty[$, la fonction f_n définie par :

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}.$$

Q1. Démontrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur J.

On note alors pour tout x de J, $\varphi(x)$ sa somme.

Q2. Montrer que cette série de fonctions ne converge pas normalement sur J.

Q3. On désire étudier la convergence uniforme sur J de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in J$, $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$.

3.1 Justifier et donner la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(x)$ pour tout x fixé dans J.

3.2 Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in J$, $|R_n(x)| \leqslant |f_{n+1}(x)|$.

3.3 Conclure.

Q4. En citant le théorème utilisé ainsi que ses hypothèses, déterminer $l = \lim\limits_{x\to+\infty} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

Q5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

5.1 Justifier la convergence de la série de terme général u_n. On note $a = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ sa somme.

5.2 On fixe dans cette question $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in J$ et on pose :

$$g : [nx, nx+1] \to \mathbb{R},\ t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

Justifier qu'il existe $c_{n,x} \in]nx, nx+1[$ tel que $\dfrac{1}{\sqrt{1+nx}} - \dfrac{1}{\sqrt{nx}} = g'(c_{n,x})$.

En déduire que $\left|\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}} - \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{nx}}\right| \leqslant \dfrac{1}{2(nx)^{\frac{3}{2}}}$.

5.3 On pose $S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{nx^{\frac{3}{2}}}$. Montrer :

$$\forall x \in J,\ \left|\varphi(x) - \frac{a}{\sqrt{x}} - 1\right| \leqslant \frac{S}{2x^{\frac{3}{2}}}.$$

En déduire que l'on a quand x tend vers $+\infty$:

$$\varphi(x) = l + \frac{a}{\sqrt{x}} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right).$$

Exercice 02

Soit n un entier naturel non nul. On donne, dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ deux variables aléatoires X et Y prenant leurs valeurs dans $[\![1, n+1]\!]$.
On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2, \quad p_{i,j} = \mathcal{P}\big([X=i] \cap [Y=j]\big) = \alpha \binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1}.$$

Q1. Déterminer la valeur du réel α.

Q2. Déterminer les lois des variables aléatoires X et Y.

Q3. Les deux variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Q4. Reconnaître la loi de la variable aléatoire $Z = X - 1$. En déduire l'espérance et la variance de la variable aléatoire X.

Q5. On note $B \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice dont le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne est :

$$b_{i,j} = \mathcal{P}_{[X=j]}\big([Y=i]\big).$$

Montrer que pour tout $(i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2$, $b_{i,j} = \dfrac{1}{2^n}\dbinom{n}{i-1}$.

Q6. Déterminer $\mathrm{Rg}\,(B)$ et les sous-espaces vectoriels $\mathsf{Im}\,(B)$ et $\mathsf{Ker}\,(B)$.

Q7. Déterminer une matrice colonne $C \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ et une matrice ligne $L \in \mathcal{M}_{1,n+1}(\mathbb{R})$ telles que l'on ait : $B = CL$. Calculer alors LC en fonction de B.

Q8. Démontrer que $B^2 = \mathrm{Tr}\,(B)B$.

Q9. Déterminer les valeurs propres de B. La matrice B est-elle diagonalisable ?

Exercice 03

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que la matrice A est à diagonale propre lorsque son polynôme caractéristique est $\chi_A = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X - a_{ii})$.

Q1. Donner deux exemples de matrices à diagonale propre qui ne sont pas diagonales.

Q2. Soient α et β deux réels et $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta \\ \alpha & \beta & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur les réels α et β pour que M soit une matrice à diagonale propre.

Q3. Soient dans cette question X_1, X_2 et X_3 des variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et qui suivent toutes les trois la loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{3}$.

3.1 Préciser $X_1(\Omega)$. Donner la loi de la variable aléatoire X_1 et donner sans démonstration les valeurs de son espérance et de sa variance.

3.2 Exprimer l'événement $(X_1 = X_2)$ sous forme d'une réunion dénombrable d'évènements incompatibles. Calculer alors $P(X_1 = X_2)$.

Météo-France
73, avenue de Paris - 94165 Saint-Mandé CEDEX - France
www.meteofrance.fr @meteofrance

3.3 Exprimer aussi l'événement $(X_1 = X_2 = X_3)$ sous forme d'une réunion dénombrable d'évènements incompatibles. Calculer alors $P(X_1 = X_2 = X_3)$.

3.4 Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose :

$$B(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & X_1(\omega) - X_2(\omega) \\ 0 & 0 & X_2(\omega) - X_3(\omega) \\ X_1(\omega) - X_2(\omega) & X_2(\omega) - X_3(\omega) & 0 \end{pmatrix}.$$

On notera ainsi $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & X_1 - X_2 \\ 0 & 0 & X_2 - X_3 \\ X_1 - X_2 & X_2 - X_3 & 0 \end{pmatrix}$ la fonction qui, à tout ω de Ω, associe la matrice $B(\omega)$.

Déterminer la probabilité pour que B soit une matrice à diagonale propre.

Q4. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On rappelle que A^T désigne la matrice transposée de la matrice A.

4.1 Calculer $\mathbf{tr}(A^T A)$ en fonction des coefficients de la matrice A où $\mathbf{tr}(M)$ désigne la trace de la matrice M.

4.2 Rappeler l'énoncé du théorème spectral.

4.3 On suppose dans cette question que A est une matrice symétrique réelle.
Démontrer que $\mathbf{tr}(A^T A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$ où les λ_i sont les n valeurs propres distinctes ou non de la matrice A.

4.4 Déterminer les matrices symétriques réelles à diagonale propre.

Exercice 04

Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$I_n = \int_1^{+\infty} \exp\left(-t^n\right)\, dt.$$

Q1. Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'existence de I_n.

Q2. En citant précisément le théorème utilisé, justifier l'existence et déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Q3. En le justifiant, effectuer le changement de variable $u = t^n$ dans I_n.

Q4. Déterminer alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nI_n$.
On donnera le résultat en fonction d'une intégrale J que l'on ne cherchera pas à calculer.

Q5. En déduire un équivalent de I_n au voisinage de $+\infty$ en fonction de J.

Q6. Déterminer le rayon de convergence et la somme de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$.

Q7. On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} I_n x^n$.

7.1 Déterminer le rayon de convergence $R > 0$ de cette série entière.

7.2 On pose pour tout $x \in]-R, R[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} I_n x^n$.
Montrer que la suite $(I_n)_n$ est décroissante. Peut-on définir f pour $x = -R$?
De même, peut-on définir f pour $x = R$?