CONCOURS INTERNE POUR LE RECRUTEMENT

D'ÉLÈVES INGÉNIEURS DES TRAVAUX DE LA MÉTÉOROLOGIE

SESSION 2018

****

ÉPREUVE ÉCRITE OBLIGATOIRE

MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

Coefficient : 4

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

La rigueur du raisonnement et la clarté de la présentation seront prises en compte dans la notation.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'épreuve de Mathématiques comporte deux problèmes indépendants :

Problème numéro 01 : 10 points

Problème numéro 02 : 10 points

Cette épreuve comporte 5 pages (page de garde incluse).

Météo-France, établissement public administratif
Direction des ressources humaines
73, avenue de Paris 94165 Saint-Mandé Cedex

Problème 01

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, on considère ici des variables aléatoires réelles discrètes finies ou infinies, c'est-à-dire que si X est une telle variable aléatoire réelle, $X(\Omega)$ est un ensemble fini ou un ensemble dénombrable.
On appelle ***fonction génératrice des moments de*** X, lorsqu'elle existe, la fonction M_X de variable $t \mapsto E\left(e^{tX}\right)$, où $E\left(e^{tX}\right)$ désigne l'espérance de la variable aléatoire e^{tX}.

Partie A. Cas particulier de variables aléatoires discrètes finies

Ici X désigne une variable aléatoire réelle discrète prenant un nombre fini de valeurs $x_1, ..., x_r$ avec les probabilités respectives $p_1, ..., p_r$, où $r \in \mathbb{N}^\star$.
On considère aussi la fonction ϕ_X définie sur $\mathbb{R}^\star$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^\star,\ \phi_X(t) = \frac{1}{t}\ln(M_X(t)).$$

1. Dans cette question **seulement**, X suit la loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$.
   Que valent $E(X)$ et $V(X)$? Déterminer M_X et ϕ_X.
2. Justifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $k \in [\![1, r]\!]$: $e^{tx_k} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(tx_k)^n}{n!}$.
   Montrer alors que pour tout $t \in \mathbb{R}$: $M_X(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{E(X^n)}{n!} t^n$.
   En déduire que M_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que :
   $$\forall k \in \mathbb{N},\ M_X^{(k)}(0) = E(X^k).$$
3. Donner le développement limité à l'ordre 1 puis à l'ordre 2 au voisinage de 0 de :
   $$u \mapsto \ln(1+u).$$
4. Justifier que $M_X(t) = M_X(0) + M_X'(0)t + o(t)$, quand t tend vers 0.
   Montrer que ϕ_X est bien définie sur $\mathbb{R}^\star$ et prolongeable par continuité en 0.

On pose dans la suite $\phi_X(0) = E(X)$ et on note encore ϕ_X la fonction prolongée.

5. Justifier que $M_X(t) = M_X(0) + M_X'(0)t + \dfrac{M''(0)}{2!}t^2 + o(t^2)$, quand t tend vers 0.
   Démontrer que ϕ_X est dérivable en 0 et calculer $\phi_X'(0)$ en fonction de $V(X)$.
6. (a) Montrer que : $\forall u \leqslant 0,\ e^u \leqslant 1 + u + \frac{1}{2}u^2$ et $\forall u \in]-1, +\infty[,\ \ln(1+u) \leqslant u$.
   (b) Montrer que si X ne prend que des valeurs négatives ou nulles, alors, pour tout t supérieur ou égal à 0, on a l'inégalité : $\phi_X(t) \leqslant E(X) + \frac{t}{2}E(X^2)$.
7. (a) Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, on note f_i la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $t \mapsto e^{tx_i}$.
   Montrer que la famille $(f_1, ..., f_r)$ est libre.
   (b) En déduire que deux *v.a.r.d* finies X et Y ont la même loi si, et seulement si, les fonctions ϕ_X et ϕ_Y sont égales.
8. Montrer que si X et Y sont des *v.a.r.d* finies indépendantes alors $\phi_{X+Y} = \phi_X + \phi_Y$.
   (On rappelle que si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires réelles indépendantes d'espérances finies, alors $E(X_1X_2) = E(X_1)E(X_2)$.)

9. On suppose dans cette question **seulement** que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(s,p)$, où $s \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$. Que valent $E(X)$ et $V(X)$? Déterminer ϕ_X.

10. On considère maintenant une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires réelles discrètes et finies mutuellement indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, qui suivent la même loi que X.
On note m l'espérance de X et σ son écart-type que l'on suppose strictement positif.
On pose : $\forall n \in \mathbf{N}^\star$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ et $S_n^\star = \dfrac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}}$.
On pourra utiliser les résultats suivants, si $Y_1, ..., Y_n$ sont n variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes alors $V\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(Y_i)$ et $E\left(\prod_{i=1}^{n} Y_i\right) = \prod_{i=1}^{n} E(Y_i)$.

    (a) Montrer : $\forall n \in \mathbf{N}^\star$, $\forall t \in \mathbf{R}^\star$, $\phi_{S_n^\star}(t) = \dfrac{-m\sqrt{n}}{\sigma} + \dfrac{\sqrt{n}}{\sigma}\phi_X\left(\dfrac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)$.

    (b) Justifier que $\phi_X(u) = \phi_X(0) + \phi_X'(0)u + o(u)$, où u tend vers 0.
    Montrer enfin que : $\lim_{n\to+\infty} \phi_{S_n^\star}(t) = \dfrac{t}{2}$.

Partie B. Cas de variables aléatoires discrètes infinies.

Soit X une variable aléatoire réelle discrète infinie, notons I_X l'ensemble des réels t pour lesquels M_X existe.

1. On veut montrer que I_X est un intervalle contenant 0.

    (a) Montrer que, pour tous réels a, b, c tels que $a < b < c$ et tout réel x, $e^{bx} \leqslant e^{ax} + e^{cx}$.

    (b) Justifier le fait que $0 \in I_X$.

    (c) Soient $a \in I_X$ et $c \in I_X$ avec $a < c$. Montrer que si $b \in]a, c[$ alors $b \in I_X$. Conclure.

2. Dans cette question **seulement**, X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
Rappeler $X(\Omega)$. Montrer : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\sum_{n\geqslant 0} P(X = n)e^{tn}$ est une série absolument convergente.
En déduire que la fonction M_X existe pour tout t, puis l'expliciter.

3. On suppose que M_X est définie sur $I_X =]-a, a[$, où $a > 0$. Notons $X(\Omega) = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.
Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in]-a, a[$,
$$u_n(t) = P(X = x_n)e^{tx_n}.$$
Soit enfin $\alpha > 0$ tel que $[-\alpha, \alpha] \subset]-a, a[$ et soit $\rho \in]\alpha, a[$.

    (a) Montrer que pour tout $t \in]-\alpha, \alpha[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e^{tx_n} \leqslant e^{\alpha|x_n|}$.
    En déduire : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall t \in]-\alpha, \alpha[$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n^{(k)}(t)| \leqslant P(X = x_n)|x_n|^k e^{\alpha|x_n|}$, où $u_n^{(k)}$ désigne la dérivée $k^{\text{ème}}$ de la fonction u_n.

    (b) Soit $k \in \mathbb{N}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\, x \mapsto x^k e^{(\alpha-\rho)x}$.
    Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et justifier le fait que f est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

    (c) Montrer : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists M_k > 0$, $\forall t \in]-\alpha, \alpha[$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n^{(k)}(t)| \leqslant M_k P(X = x_n)e^{\rho|x_n|}$.

    (d) Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n^{(k)}$ converge normalement sur $]-\alpha, \alpha[$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
    Indication : on pourra remarquer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $e^{\rho|x_n|} \leqslant e^{\rho x_n} + e^{-\rho x_n}$.
    En déduire que M_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-a, a[$ et que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $E(X^k) = M_X^{(k)}(0)$.

Problème 02

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Partie A. Opérateur de translation

L'opérateur de translation est l'application r de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ telle que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ r(P(X)) = P(X+1).$$

1. Montrer que r est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. On suppose $n = 2$ dans cette question **seulement**. Écrire la matrice de r dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Déterminer le noyau et l'image de r.
3. Exprimer, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ non nul, le degré et le coefficient dominant de $r(P)$ à l'aide du degré et du coefficient dominant de P.
4. Soient $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $k \in \mathbb{N}$. Donner l'expression de $r^k(P)$.
5. Donner la matrice $M = (M_{i,j})$ de r dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. On exprimera les coefficients $M_{i,j}$ de cette matrice en fonction de i et de j.
6. Quel est le polynôme caractéristique de r ? Ses valeurs propres ? L'endomorphisme r est-il diagonalisable ?
7. L'endomorphisme r est-il un isomorphisme ? Si oui, préciser r^{-1}. L'expression de r^k trouvée pour $k \in \mathbb{N}$ est-elle encore valable pour tout $k \in \mathbb{Z}$?
8. Exprimer les coefficients de la matrice M^{-1}.
9. On considère une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on définit :

$$(1) \quad v_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} u_j.$$

   (a) Déterminer une matrice $Q \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que : $\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$.

   (b) En déduire la formule d'inversion :

$$(2) \quad \forall k \in \mathbb{N},\ u_k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j.$$

   (c) On considère ici un réel λ et la suite u définie par $u_k = \lambda^k$ pour tout $k \in \mathbb{K}$. Quelle est la suite v définie alors par la formule (1) ? Vérifier alors la formule (2).

Partie B. Opérateur de différence

L'opérateur de différence est l'application δ de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ telle que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \delta(P(X)) = P(X+1) - P(X).$$

1. Montrer rapidement que δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. On suppose $n = 2$ dans cette question **seulement**. Écrire la matrice de δ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Déterminer le noyau et l'image de δ.
3. Exprimer, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ non nul, le degré et le coefficient dominant de $\delta(P)$ à l'aide du degré et du coefficient dominant de P.

4. En déduire le noyau et l'image de l'endomorphisme δ.
5. (a) Vérifier que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, et tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $\deg P \geqslant j$, on a :

$$\deg(\delta^j(P)) = (\deg P) - j.$$

Que se passe t-il si $\deg P \leqslant j - 1$?

(b) Déterminer, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}\,(\delta^j)$ et $\mathrm{Im}\,(\delta^j)$.
6. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Exprimer $\delta^k(P)$ en fonction des $\tau^j(P)$ pour $j \in [\![0, k]\!]$.
7. Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Montrer que :

$$(3) \quad \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}P(j) = 0.$$

8. Dans cette question, on se propose de montrer par l'absurde qu'il n'existe pas d'endomorphisme $\phi \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\phi^2 = \delta$.
On suppose donc qu'il existe un tel endomorphisme ϕ.
   (a) Montrer que ϕ et δ^2 commutent.
   (b) En déduire que $\mathbb{R}_1[X]$ est stable par ϕ, c'est-à-dire que $\phi\,(\mathbb{R}_1[X]) \subset \mathbb{R}_1[X]$.
   Indication : on pourra remarquer que $\mathrm{Ker}\,(\delta^2) = \mathbb{R}_1[X]$.
   (c) On veut montrer ici qu'il n'existe pas de matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Pour cela, on va raisonner par l'absurde et supposons l'existence d'une telle matrice et appelons f l'endomorphisme canoniquement associé à A.
      i. Montrer qu'alors f ne peut être ni injectif, ni nul et qu'il est de rang 1.
      ii. Montrer que $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.
      iii. Que vaut f^4 ?
      En considérant une base de $\mathrm{Im}\, f$ et son image par f, arriver à une absurdité.
   (d) On considère maintenant l'endomorphisme ψ induit par ϕ sur $\mathbb{R}_1[X]$. En notant M la matrice de ψ dans la base canonique de $\mathbb{R}_1[X]$, calculer M^2. Conclure.
9. Dans cette question, on cherche tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_n[X]$ stables par δ.
   (a) Soit P un polynôme non nul de degré $d \leqslant n$. Montrer que la famille

$$\left(P,\ \delta(P),\ \ldots,\ \delta^d(P)\right)$$

   est libre. Quel est l'espace vectoriel engendré par cette famille ?
   (b) En déduire que, si V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ stable par δ et différent de $\left\{\vec{0}_{\mathbb{R}_n[X]}\right\}$, il existe un entier $d \in [\![1, n]\!]$ tel que $V = \mathbb{R}_d[X]$.