



CONCOURS INTERNE POUR LE RECRUTEMENT
D'ÉLÈVES INGÉNIEURS DES TRAVAUX DE LA MÉTÉOROLOGIE
SESSION 2025

ÉPREUVE ÉCRITE OBLIGATOIRE
MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

Coefficient : 4

La rigueur du raisonnement et la clarté de la présentation seront prises en compte dans la notation.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'utilisation de toute documentation (dictionnaire, support papier, traducteur, téléphone portable, assistant électronique, etc) est strictement interdite.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

L'épreuve de Mathématiques comprend deux exercices et deux problèmes tous indépendants et de poids différents

Exercice 01 : 1.5 points

Exercice 02 : 3 points

Problème 01 : 7 points

Problème 02 : 8.5 points

Cette épreuve comporte 5 pages (page de garde incluse).

Exercice 01

Étude d'un lancer dans un panier

Un jeu consiste à lancer un ballon dans un panier. On suppose que la probabilité de réussir le panier est $p \in]0, 1[$ et que les lancers sont indépendants. On note $q = 1 - p$.

- Q01.** On note T le nombre de lancers nécessaires pour réussir un panier pour la première fois. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire T ? On explicitera la loi sans démonstration.
- Q02.** On effectue une infinité de lancers. Calculer la probabilité de réussir au moins un panier.

Indication :

On posera pour tout $k \in \llbracket 1, +\infty \llbracket$, R_k l'événement « le $k^{\text{ème}}$ lancer est réussi. »

On remarquera que $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} R_k\right)$ est la probabilité cherchée et on appliquera les lois de Morgan et la continuité décroissante.

Exercice 02

Nature d'intégrales généralisées

Soit $a > 0$, on considère les fonctions f_a définies sur \mathbb{R}_+^* par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f_a(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x^a}.$$

On note les intégrales généralisées :

$$I_a = \int_0^1 f_a(t) dt \text{ et } J_a = \int_1^{+\infty} f_a(t) dt.$$

- Q03.** Montrer que I_a converge pour $a < 2$. Qu'en est-il pour $a \geq 2$?
- Q04.** Soit $a > 1$, montrer que J_a est absolument convergente.
- Q05.** On veut connaître la nature de J_a pour $a \in]0, 1]$.

(a) Soit $X > 1$, montrer : $\int_1^X f_a(t) dt = -\frac{1}{\pi} - \frac{\cos(\pi X)}{\pi X^a} - \frac{a}{\pi} \int_1^X \frac{\cos(\pi t)}{t^{a+1}} dt.$

(b) Conclure.

- Q06.** Pour quelles valeurs de a l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_a(t) dt$ est-elle convergente?

Problème 01

On considère les suites $(u_n)_{n \geq 0}$, $(v_n)_{n \geq 0}$ et $(w_n)_{n \geq 0}$ définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 0 \\ w_0 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \geq 0, \quad \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - v_n + w_n \\ v_{n+1} = v_n + w_n \\ w_{n+1} = -u_n + v_n + w_n \end{cases} .$$

On note : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et, pour tout $n \geq 0$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

Partie I. Éléments propres d'une matrice

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont A est la matrice dans la base canonique.

- Q07.** Calculer le polynôme caractéristique χ_A de A et l'écrire sous forme factorisée.
Q08. La matrice A est-elle trigonalisable ? Justifier la réponse.
Q09. La matrice A est-elle inversible ?
Q10. La matrice A est-elle diagonalisable ? Justifier votre réponse.

Partie II. Trigonalisation de A

On considère les éléments suivants de \mathbb{R}^3 : $b_1 = (0, 1, 1)$, $b_2 = (1, 1, 0)$ et $b_3 = (0, 0, 1)$.

Q11. Montrer que $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 .

Q12. Montrer que la matrice de f dans la base \mathcal{B} est : $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Q13. On note P la matrice de passage de la base canonique de \mathbb{R}^3 à \mathcal{B} .

Déterminer P et vérifier que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Q14. Déterminer une relation entre A , P , T et P^{-1} .

Calcul des puissances de T et expression de u_n , v_n , w_n

Q15. On note $T = N + D$, où D est une matrice diagonale et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer D et vérifier que N et D commutent.

Q16. Que vaut N^n pour tout entier $n \geq 2$?

Q17. Dédurre de ce qui précède une expression de T^n . On donnera chacun de ses coefficients.

Q18. Pour $n \in \mathbb{N}$, établir une relation entre X_{n+1} , A et X_n .

Q19. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression de X_n en fonction de A , n et X_0 .

Q20. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, A^n en fonction de T^n , P et P^{-1} . Démontrer cette relation par récurrence.

Q21. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n , v_n et de w_n en fonction de n .

Problème 02

Partie I : Préalable

Dans ce qui suit, on désigne par x_1, x_2 et x_3 trois réels distincts, et par P une fonction polynomiale de degré strictement plus petit que trois, qui ne s'annule pas en x_1, x_2 et x_3 . Soit Q la fonction polynomiale définie, pour tout réel x , par : $Q(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

On pose, pour tout réel x de $\mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, x_3\}$: $g(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$.

On admet qu'il existe trois réels a_1, a_2, a_3 tels que, pour tout réel x de $\mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, x_3\}$:

$$g(x) = \frac{a_1}{x - x_1} + \frac{a_2}{x - x_2} + \frac{a_3}{x - x_3}$$

Q22. En calculant, de deux façons différentes : $\lim_{x \rightarrow x_1} (x - x_1) g(x)$, établir que : $a_1 = \frac{P(x_1)}{Q'(x_1)}$, où Q' désigne le polynôme dérivé de Q .

Donner les expressions analogues pour a_2 et a_3 (en les justifiant brièvement).

Q23. On suppose désormais que, pour tout réel x : $P(x) = 1$ avec l'hypothèse suivante :

$$x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = -1 \quad , \quad x_3 = -\frac{1}{2}$$

Donner les valeurs explicites de a_1, a_2 et a_3 .

Partie II

On considère la fonction F qui, à tout réel x de son domaine de définition \mathcal{D}_F , associe :

$$F(x) = \ln \left(\frac{x(x+1)}{(2x+1)^2} \right)$$

Q24. Déterminer \mathcal{D}_F . Ce résultat sera nécessairement justifié à l'aide d'un tableau de signes.

Q25. Justifier que F est dérivable sur \mathcal{D}_F . On désigne par f sa dérivée.

Q26. Montrer que, pour tout réel x de \mathcal{D}_F : $f(x) = \frac{1}{x(x+1)(2x+1)}$.

Q27. On s'intéresse, dans ce qui suit, à la série entière $\sum_{n \geq 1} f(n)x^{2n+1}$.

(a) Déterminer son rayon de convergence R .

(b) Rappeler le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \ln(1-x)$, ainsi que son rayon de convergence.

(c) i. Donner le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$, en précisant le rayon de convergence.

ii. Vérifier que, pour tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $\frac{1}{1-x^2}$ peut s'exprimer comme une combinaison linéaire de $\frac{1}{1-x}$ et $\frac{1}{1+x}$.

- (d) Dédurre de la question précédente, en justifiant le résultat à l'aide d'un théorème de cours, le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$, en précisant le rayon de convergence, que l'on comparera à la valeur R obtenue en **Q27-a**
- (e) Montrer que, pour tout réel x de $] -R, R[$: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n} = -x \ln(1-x^2)$
- (f) Pour tout réel x de $] -R, R[$, exprimer, à l'aide de fonctions usuelles :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n(n+1)(2n+1)}$$

Indication : on pensera à utiliser les résultats du Préambule.

- (g) Déterminer : $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n(n+1)(2n+1)} \right)$

Q28. On considère désormais la série de terme général $f(n)$, pour $n \geq 1$, où f désigne la fonction introduite à la question **Q25**.

- (a) Étudier la convergence de la série de terme général $f(n)$, pour $n \geq 1$.
- (b) Pour tout entier naturel non nul n , on pose : $H(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Montrer que, pour tout entier naturel non nul n :

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} = H(2n+1) - \frac{1}{2}H(n)$$

- (c) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} = H(n) - 1 + \frac{1}{n+1}$$

puis en utilisant **Q28-b**, montrer :

$$\sum_{k=1}^n f(k) = 3 + 4H(n) - 4H(2n+1) + \frac{1}{n+1}$$

Q29. On admet qu'il existe une constante réelle γ (appelée **constante d'Euler**) telle que,

lorsque N tend vers $+\infty$, $\sum_{k=1}^N \frac{1}{k} = \ln N + \gamma + o(1)$.

- (a) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} (4H(n) - 4H(2n+1))$.
- (b) En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$, où f désigne la fonction introduite à **Q25**.