RÉPUBLIQUE FRANÇAISE
Liberté
Égalité
Fraternité

METEO FRANCE

CONCOURS INTERNE POUR LE RECRUTEMENT
D'ÉLÈVES INGÉNIEURS DES TRAVAUX DE LA MÉTÉOROLOGIE

SESSION 2023

****

ÉPREUVE ÉCRITE OBLIGATOIRE

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures Coefficient : 4

La rigueur du raisonnement et la clarté de la présentation seront prises en compte dans la notation. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre. **L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.**

L'épreuve de Mathématiques comprend un exercice et deux problèmes indépendants :

Barème :

- Exercice : 3 points
- Problème 01 : 9 points
- Problème 02 : 8 points

Cette épreuve comporte 5 pages (page de garde incluse).

Exercice

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.
L'objectif de cet exercice est d'étudier l'existence d'extremums pour f.

Q1. Déterminer les points critiques de f.

Q2. Expliciter des points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ arbitrairement proches de $(0,0)$, tels que $f(x,y) < 0$. Expliciter de même des points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ arbitrairement proches de $(0,0)$, tels que $f(x,y) > 0$. La fonction f admet-elle en $(0,0)$ un maximum local, un minimum local ou aucun des deux ?

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$: $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2,\ g(u,v) = f(1+u, 1+v) - f(1,1)$.

Q3. Calculer pour $(u,v) \in \mathbb{R}^2,\ g(u,v)$ puis, pour $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R},\ g(r\cos\theta, r\sin\theta)$ et montrer

$$g(r\cos\theta, r\sin\theta) = 3r^2 \left(1 - \frac{1}{2}\sin(2\theta) + r(\cos^3\theta + \sin^3\theta)\right).$$

Q4. Prouver que pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R},\ g(r\cos\theta, r\sin\theta) \geqslant 3r^2 \left(\frac{1}{2} - 2r\right)$.
Que peut-on en conclure ?

Q5. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Écrire la matrice hessienne $H_f(x,y)$ de f en un point (x,y). Appliquer aux points critiques trouvés à la question **Q1**. En s'aidant du déterminant et de la trace de $H_f(x,y)$, retrouver la nature de ces points critiques.

Q6. La fonction f possède-t-elle un ou des extremums globaux ?

Problème 01

Présentation. Ce problème s'intéresse dans la **partie I** à des propriétés des matrices de rang 1. Certaines de ces matrices sont ensuite utilisées dans la **partie II** pour construire des matrices orthogonales permettant dans la **partie III** de prouver l'existence d'une factorisation QR pour une matrice carrée quelconque.

Notations. Pour tous n, $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on note $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$. L'ensemble des matrices réelles carrées de taille n est noté $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$: on note également A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui à X associe AX.
Pour tout $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, A^T désigne la matrice transposée de A.
Une matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est dite nilpotente s'il existe un entier $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ tel que : $A^k = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{R})}$.
L'ensemble $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est muni de son produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme associée $\|\cdot\|$.
En identifiant $\mathrm{M}_1(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$, on a pour tous $X, Y \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$\langle X, Y \rangle = X^T Y, \quad \text{et :} \quad \|X\|^2 = \langle X, X \rangle.$$

On suppose dans tout ce problème que $n \in \mathbb{N}$ est un entier naturel vérifiant $n \geqslant 2$.

Partie I. Matrices de rang 1

I.1 Une expression des matrices de rang 1

Q7. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1. En utilisant le fait que toutes les colonnes de A sont proportionnelles, montrer qu'il existe $X, Y \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$ tels que : $A = XY^T$.

Q8. Réciproquement, soient $X, Y \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$.
Montrer que la matrice XY^T est de rang 1.

I.2 Quelques propriétés

Ici, $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ **est une matrice de rang** 1.

Q9. Montrer que $A^2 = \mathrm{tr}(A)A$.

Q10. En déduire, par récurrence sur k, une expression de la matrice A^k en fonction de A pour tout entier $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Q11. On rappelle qu'une matrice M est nilpotente d'indice $p \in \mathbb{N}^\star$ si et seulement si à la fois on a : $M^p = 0$ et $M^{p-1} \neq 0$.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur la trace de A pour que A soit nilpotente.

Q12. Donner une condition nécessaire et suffisante sur la trace de A pour que A soit diagonalisable.

Partie II Matrices de Householder

II.1 Exemple De la question **Q13** à la question **Q18**, on considère la matrice de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ et les matrices colonnes de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ définis par :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Q13. Calculer A^2. En déduire les valeurs propres possibles de A sans calculer le polynôme caractéristique.

Q14. À partir du polynôme caractéristique de A, déterminer les valeurs propres et trouver des bases des sous-espaces propres de A. On pourra les écrire en utilisant U, U_1 et U_2.

Q15. Montrer que les deux sous-espaces propres de A sont orthogonaux.
Pourriez vous préciser A géométriquement ?

Q16. Déterminer une base orthonormale de chacun des sous-espaces propres de A. (Pour l'une des deux bases, on appliquera le procédé de Gram-Schmidt.)
Écrire alors une matrice de passage P de la base canonique à la base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ réunion des deux bases orthonormales des deux sous-espaces propres. Écrire aussi une relation (sans calculs) entre A, P et une certaine matrice diagonale D à écrire.

Q17. On définit $P_U \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ par : $P_U = \dfrac{1}{\|U\|^2}UU^T$.

(a) Expliciter P_U puis montrer que P_U est une matrice de projection.

(b) Déterminer $\mathrm{Im}\,(P_U)$ et $\mathrm{Ker}\,(P_U)$.
Montrer que $\mathrm{Im}\,(P_V) = \mathrm{Vect}\,(U)$ et que $\mathrm{Ker}\,(P_U) = \mathrm{Vect}\,(U)^\perp$.
En déduire que P_U est une matrice de projection orthogonale.

Q18. On définit $Q_U \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ par : $Q_U = I_3 - \dfrac{2}{\|U\|^2}UU^T$. Déterminer la matrice Q_U comme ce qui a été fait à la question **Q17**. Que remarque t-on ?

II.2 Matrices de Householder. Cas général

Soit $V \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$. On définit P_V, $Q_V \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$P_V = \frac{1}{\|V\|^2}VV^T, \quad \text{et :} \quad Q_V = \mathrm{I}_n - 2\frac{1}{\|V\|^2}VV^T. \tag{1}$$

Q19. Montrer que $\mathrm{Im}\,(P_V) = \mathrm{Vect}\,(V)$ et que $\ker\,(P_V) = \mathrm{Vect}\,(V)^\perp$.
On pourra montrer au passage que P_V est une matrice symétrique.

Q20. Montrer que P_V est la projection orthogonale sur la droite $\mathrm{Vect}\,(V)$.
Préciser le rang et la trace de la matrice P_V.

Q21. Montrer que Q_V est symétrique et orthogonale.

Q22. Montrer que Q_V est la symétrie orthogonale par rapport à $\mathrm{Vect}\,(V)^{\perp}$.

Partie III Factorisation QR

III.1 Un résultat préliminaire

Soient $U, V \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, tels que : $\|U\| = \|V\|$. On note : $D = \mathrm{Vect}\,(U - V)$.

Q23. Montrer que $D^{\perp}$ est l'ensemble des $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, tels que : $\|X - U\| = \|X - V\|$.

Q24. Vérifier que $U + V \in D^{\perp}$ et donner la décomposition de U sur la somme directe $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = D \oplus D^{\perp}$.

Q25. On suppose U et V non colinéaires. Calculer $Q_{U-V}U$ où Q_{U-V} est définie en (1).

Q26. En déduire que pour tous $\tilde{U}$, $\tilde{V} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il existe une matrice orthogonale Q, telle que $Q\tilde{U}$ soit colinéaire à $\tilde{V}$.
(On pourra commencer par traiter le cas où $\tilde{U}$ et $\tilde{V}$ sont colinéaires puis on passera au cas général.)

III.2 – Factorisation QR

Q27. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. On note $(E_1, ..., E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. En appliquant **Q 26** avec $\tilde{U} = AE_1$ et $\tilde{V} = E_1$, montrer qu'il existe une matrice orthogonale Q_1, telle que Q_1A soit de la forme : $Q_1A = \begin{pmatrix} \alpha & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & C_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $C_1 \in \mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{R})$.

Q28. On veut montrer par récurrence sur l'entier $n \geqslant 2$ que pour tout $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice Q orthogonale, telle que QA soit triangulaire supérieure.

a. Montrer l'initialisation (cas $n = 2$) en utilisant la question précédente.

b. Soit n un entier supérieur ou égal à 2 pour lequel la proposition soit vraie à l'ordre n. Prenons $A \in \mathrm{M}_{n+1}(\mathbb{R})$. D'après ce qui précède, il existe une matrice $Q_1 \in \mathrm{O}_{n+1}(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et une matrice $C_1 \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ tels que : $Q_1A = \begin{pmatrix} \alpha & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & C_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$.
Justifier l'existence de $Q_2 \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que Q_2C_1 soit une matrice carrée d'ordre n triangulaire supérieure. On pose (notation blocs) $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0_{\mathrm{M}_{1,n}(\mathbb{R})} \\ 0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})} & Q_2 \end{pmatrix} \times Q_1$.
Montrer que Q vérifie la proposition au rang $n + 1$.

Problème 02

Q29. Un résultat préliminaire.
Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles et T-périodique. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, en introduisant le plus grand entier N tel que $NT \leqslant x$, on a l'égalité :

$$\int_x^{x+T} f(u)\,du = \int_0^T f(u)\,du.$$

On se propose dans la suite du problème de déterminer des fonctions y de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et vérifiant, pour tout réel x, la relation :

$$xy''(x) + y'(x) - 4xy(x) = 0. \qquad (**)$$

Q30. On suppose qu'il existe une fonction g, développable en série entière, de rayon de convergence R non nul, vérifiant $(**)$, sous la forme $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et telle que : $g(0) = a_0 = 1$.

a. Justifier : $\forall x \in]-R, R[$, $g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ et $g''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$.

b. Prouver que $a_1 = 0$ et démontrer que pour tout $n \geqslant 1$, $(n+1)^2 a_{n+1} - \beta\, a_{n-1} = 0$, où β est un réel à déterminer.

c. Démontrer alors que $a_{2p+1} = 0$ pour tout entier naturel p et écrire a_{2p} en fonction de $a_0 = 1$ et de $p!$

d. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g ainsi obtenue, c'est-à-dire le rayon de convergence de la série entière définissant g.

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F : x \mapsto F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(2x\cos(t))\, dt$$

Q31. Étudier la parité de la fonction F.
On pourra utiliser le changement de variable $u = \pi - t$ et la question **Q29**.

Q32. Pour tout couple (x, t) de $\mathbb{R} \times [0, 2\pi]$, on pose $h(x, t) = \exp(2x\cos(t))$.

a. Justifier que h est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \times [0, 2\pi]$.

b. Prouver que pour tout entier naturel k non nul, la fonction $\dfrac{\partial^k h}{\partial x^k}$ existe et est continue sur $\mathbb{R} \times [0, 2\pi]$.

c. Soit I un segment de $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout entier naturel k non nul, il existe un réel positif M_k tel que :

$$\forall (x, t) \in I \times [0, 2\pi], \quad 0 \leqslant \left| \frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x, t) \right| \leqslant M_k.$$

d. En déduire que F est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

e. Donner pour tout x réel et tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ une expression de $F^{(k)}(x)$ sous la forme d'une intégrale.

Q33. Montrer que F vérifie la relation $(**)$.
Indication : On pourra utiliser la dérivée de $t \mapsto (\sin t)\exp(2x\cos(t))$.

Dans la suite, on va déterminer un développement en série entière de F.

Q34. Donner le développement en série entière au voisinage de zéro de la fonction exponentielle et son domaine de validité.

Q35. En utilisant la question précédente, montrer qu'il existe une suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n$, où I_n s'exprime simplement à l'aide de $J_n = \int_0^{2\pi} \cos^n(t)\, dt$.
On citera les théorèmes utilisés en s'assurant que toutes leurs hypothèses sont bien vérifiées.

Q36. Calculer J_0 et J_1.

Q37. Soit $n \geqslant 2$. Déterminer une relation de récurrence entre J_n et J_{n-2}.
Indication : on pourra partir de $\cos^n(t) = \cos^{n-1}(t) \times \cos(t)$ et on effectuera une intégration par parties.

Q38. En déduire, pour tout entier naturel n, une expression de J_n en fonction de n.

Q39. Comparer alors les fonctions F et g.