METEO FRANCE

CONCOURS INTERNE POUR LE RECRUTEMENT
D'ÉLÈVES INGÉNIEURS DES TRAVAUX DE LA MÉTÉOROLOGIE

SESSION 2021

****

ÉPREUVE ÉCRITE OBLIGATOIRE

MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures — Coefficient : 4

La rigueur du raisonnement et la clarté de la présentation seront prises en compte dans la notation. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'épreuve de Mathématiques comporte trois problèmes indépendants :

Problème numéro 01 : 5 points

Problème numéro 02 : 6 points

Problème numéro 03 : 9 points

Cette épreuve comporte 5 pages (page de garde incluse).

METEO
FRANCE

Problème 01

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel fixé. Pour $k \in [\![0,\, n]\!]$, on note $f_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_k(x) = \cos^k(x)\sin^{n-k}(x).$$

On note V_n le $\mathbb{C}$-espace vectoriel défini par :

$$V_n = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(f_0, f_1, \dots, f_n) = \left\{ \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k \;/\; (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \right\}.$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n la matrice tridiagonale suivante :

$$B_n = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ n & 0 & -2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & -3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 & -n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

Le terme général $b_{k,l}$ de la matrice B_n vérifie donc :

- $b_{k,k+1} = -k$ si $1 \leqslant k \leqslant n$,
- $b_{k,k-1} = n-k+2$ si $2 \leqslant k \leqslant n+1$,
- $b_{k,l} = 0$ pour tous les couples $(k,l) \in [\![1,\, n+1]\!]^2$ non couverts par les formules précédentes.

Enfin, pour $k \in [\![0,\, n]\!]$, on note $g_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_k(x) = e^{i(2k-n)x}.$$

Q1. Montrer que la famille $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est libre.
En déduire la dimension de l'espace vectoriel complexe V_n.

Q2. Établir que pour $k \in [\![1,\, n-1]\!]$, la dérivée de f_k, notée f_k', vaut $-kf_{k-1} + (n-k)f_{k+1}$.
Puis pour $k \in [\![0,\, n]\!]$, montrer que f_k' appartient à V_n. En déduire que :

$$\varphi_n : V_n \longrightarrow V_n,\ f \longmapsto \varphi_n(f) = f'$$

définit un endomorphisme de V_n et déterminer sa matrice dans la base $(f_0, f_1, \dots, f_n)$.

Q3. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_k(x) = (\cos x + i\sin x)^k(\cos x - i\sin x)^{n-k}$.

Q4. En déduire, à l'aide de la formule du binôme de Newton, que : $\forall k \in [\![0,\, n]\!], \quad g_k \in V_n$.

Q5. Pour $k \in [\![0,\, n]\!]$, calculer g_k'. En déduire que φ_n est diagonalisable. Donner la liste des valeurs propres complexes de φ_n et décrire les espaces propres correspondants.

Q6. Pour quelles valeurs de n l'endomorphisme φ_n est-il un automorphisme de V_n ?

Q7. Écrire la décomposition de g_n dans la base $(f_0, \dots, f_n)$ et en déduire que :

$$\mathrm{Ker}\,(B_n - inI_{n+1}) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix},$$

où pour tout $k \in [\![0,\, n]\!]$, on note $q_k = i^{n-k}\dbinom{n}{k}$.

Problème 02

Étant donné un entier $n \in \mathbb{N}^*$, on dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant à elles deux n boules numérotées de 1 à n. On note N_0 la variable aléatoire égale au nombre de boules initialement contenues dans l'urne U_1.

À chaque instant entier $k \in \mathbb{N}^*$, on choisit un des n numéros de façon équiprobable puis on change d'urne la boule portant ce numéro. les choix successifs sont supposés indépendants.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note N_k la variable aléatoire égale au nombre de boules dans l'urne U_1 après l'échange effectué à l'instant k.

Exemple : supposons $n = 4$ et qu'à l'instant 0, l'urne U_1 contient les boules numérotées $1, 3, 4$ et l'urne U_2 la boule 2. On a dans ce cas $N_0 = 3$.

- Si le numéro 3 est choisi à l'instant 1, on retire la boule 3 de U_1 et on la place dans U_2. On a alors $N_1 = 2$.
- Si le numéro 2 est choisi à l'instant 1, on retire la boule 2 de U_2 et on la place dans U_1. On a alors $N_1 = 4$.

Pour $l \in [\![0, n]\!]$, on note $E_{k,l}$ l'événement $(N_k = l)$ et $p_{k,l} = P(E_{k,l})$ sa probabilité.

On note enfin $Z_k = \begin{pmatrix} p_{k,0} \\ p_{k,1} \\ \vdots \\ p_{k,n} \end{pmatrix}$ le vecteur qui code la loi de la variable aléatoire N_k.

Q1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ fixé, montrer que la famille $(E_{k,0}, E_{k,1}, \ldots, E_{k,n})$ est un système complet d'événements.

Q2. Si l'urne U_1 contient j boules à l'instant k, combien peut-elle en contenir à l'instant $k+1$? (On distinguera les cas $j = 0$, $j = n$ et $j \in [\![1, n-1]\!]$.)

Q3. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $(j, l) \in [\![0, n]\!]^2$, déterminer, en séparant les cas $j = 0$, $j = n$ et $j \in [\![1, n-1]\!]$, la probabilité d'avoir $E_{k+1,j}$ sachant $E_{k,l}$, c'est-à-dire : $P_{E_{k,l}}(E_{k+1,j})$.

Q4. Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(E_{k+1,0}) = \frac{1}{n} P(E_{k,1})$ et $P(E_{k+1,n}) = \frac{1}{n} P(E_{k,n-1})$.

Puis que : $\forall j \in [\![1, n-1]\!]$, $P(E_{k+1,j}) = \frac{n-j+1}{n} P(E_{k,j-1}) + \frac{j+1}{n} P(E_{k,j+1})$.

Q5. On pose ici la matrice A_n tridiagonale suivante :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ n & 0 & 2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 & n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbf{R}).$$

Le terme général $a_{k,l}$ de la matrice A_n vérifie donc :

- $a_{k,k+1} = k$ si $1 \leqslant k \leqslant n$,
- $a_{k,k-1} = n - k + 2$ si $2 \leqslant k \leqslant n+1$,
- $a_{k,l} = 0$ pour tous les couples $(k, l) \in [\![1, n+1]\!]^2$ non couverts par les formules précédentes.

Développer pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n} A_n Z_k$ et en déduire l'égalité : $Z_k = \frac{1}{n^k} A_n^k Z_0$.

Problème 03

Q1. Rappeler le développement limité de $u \mapsto \cos u$ et de $u \mapsto \ln(1-u)$ au voisinage de 0 à l'ordre 2.

Q2. Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right)$.

Q3. On considère dans cette question la suite $(R_n)_{n\geqslant 2}$, de premier terme $R_2 = 1$ et telle que, pour tout entier $n \geqslant 3$: $R_n = R_{n-1}\cos\left(\dfrac{\pi}{n+1}\right)$.

a. Justifier l'existence de $\ln R_k$ pour tout $k \geqslant 2$.

b. Montrer, pour tout entier $n \geqslant 4$,

$$\sum_{k=4}^{n}(\ln R_k - \ln R_{k-1}) = \ln R_n - \ln R_3 = \sum_{k=4}^{n} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{k+1}\right)\right).$$

c. La suite $(\ln R_n)_{n\geqslant 2}$ est-elle convergente ?

d. Justifier l'existence de $R = \displaystyle\lim_{N\to+\infty} \prod_{k=3}^{N} \cos\left(\frac{\pi}{k}\right)$.

On écrira, dans ce qui suit : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \prod_{k=3}^{N} \cos\left(\frac{\pi}{k}\right) = \prod_{k=3}^{+\infty} \cos\left(\frac{\pi}{k}\right)$.

Q4. Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-(1-t)^n}{t}\,dt$.

a. Soit n un entier naturel non nul. Rappeler la formule donnant la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$, de premier terme 1, i.e. : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$.

b. En déduire, pour tout t de $]0,1]$, l'expression de $\dfrac{1-(1-t)^n}{t}$ en fonction d'une somme.

c. Étudier la convergence de l'intégrale I_n.

d. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n : $I_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Q5. Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{n(n+t)}\,dt$.

a. Calculer, pour tout entier naturel non nul n, l'intégrale u_n en fonction de n.

b. Étudier la convergence de la série de terme général u_n.

c. Montrer que si $n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$.

En déduire l'existence de : $\gamma = \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right)$.

Q6. On suppose que n est un entier naturel non nul et on pose à partir de cette question, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, $G_n(x) \doteq \displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt$.

On considère a et b deux réels avec $0 < a < b$ et $D = [a,b]\times]0,n]$. De plus, on pose ici :

$$f : D \to \mathbb{R},\ (x,t) \mapsto \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1},\ \phi_x :]0,n] \to \mathbb{R},\ t \mapsto t^{x-1}.$$

a. Montrer que pour tout $(x,t) \in D$, $|f(x,t)| \leqslant \phi_x(t)$. Puis montrer :
$\forall (x,t) \in [a,b] \times]0,1]$, $\phi_x(t) \leqslant \phi_a(t)$ et $\forall (x,t) \in [a,b] \times]1,n]$, $\phi_x(t) \leqslant \phi_b(t)$.
En déduire une majoration de $|f(x,t)|$ pour tout $x \in [a,b]$ et tout $t \in]0,1]$ par une fonction de variable t continue et intégrable sur $]0,n]$.

b. En déduire que G_n est continue sur $[a,b]$ puis sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. En faisant un processus analogue à ce qui précède, montrer que G_n est de classe C^1 sur $[a,b]$ puis sur $\mathbb{R}_+^*$.

d. Calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n(1)$.

Q7. On veut montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la proposition $(\mathcal{P}_n)$:

$$\text{« } \forall x > 0,\ G_n(x) = \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}. \text{ »}$$

Dans cette question, on fixe donc x **strictement positif.**

a. Montrer que $G_n(x) = n^x \displaystyle\int_0^1 (1-u)^n u^{x-1}\,du$.

b. Calculer $G_1(x)$ et en déduire que $(\mathcal{P}_1)$ est vraie.

c. Montrer, à partir d'une intégration par parties, que

$$G_{n+1}(x) = -\frac{n+1}{x} G_{n+1}(x) + \frac{(n+1)^{x+1}}{x\,n^x} G_n(x).$$

d. En déduire que si $(\mathcal{P}_n)$ est vraie alors $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie.

Q8. Étudier, pour tout réel $x > 0$ fixé, la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \left(\ln\left(1+\frac{x}{k}\right) - \frac{x}{k}\right)$.

Q9. En déduire, pour tout réel $x > 0$ fixé, la convergence de la suite v définie par :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*,\ v_N = \prod_{k=1}^{N} \left[\left(1+\frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}\right].$$

On posera alors : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} v_N = \prod_{k=1}^{+\infty} \left[\left(1+\frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}\right]$.

Q10. Montrer en utilisant la proposition $(\mathcal{P}_n)$ que, pour tout réel $x > 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} G_n(x) = \frac{1}{x} e^{-\gamma x} \lim_{N\to+\infty} \prod_{k=1}^{N} \left[\left(1+\frac{x}{k}\right)^{-1} e^{\frac{x}{k}}\right] = \frac{1}{x} e^{-\gamma x} \prod_{k=1}^{+\infty} \left[\left(1+\frac{x}{k}\right)^{-1} e^{\frac{x}{k}}\right].$$

Q11. $\forall x > 0$, on pose : $H(x) = x e^{\gamma x} \displaystyle\lim_{N\to+\infty} \prod_{k=1}^{N} \left[\left(1+\frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}\right] = x e^{\gamma x} \prod_{k=1}^{+\infty} \left[\left(1+\frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}\right]$.

On suppose maintenant que x est fixé dans $]0,1[$.

a. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \ln\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)$ est convergente.

b. On pose : $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $P_N = \displaystyle\prod_{k=1}^{N} \left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)$. Justifier que $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} P_N$ existe.

c. Vérifier que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} G_n(x) = \frac{1}{H(x)}$.

d. Montrer que : $G_n(1+x)G_n(1-x) = \dfrac{n^2}{(n+1)^2} \displaystyle\prod_{k=1}^{n+1} \left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)^{-1}$.

e. Montrer alors que $H(1+x)H(1-x) = \displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty} \left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)$ et $\dfrac{H(1+x)}{H(x)} = \dfrac{1}{x}$.