RÉPUBLIQUE FRANÇAISE
*Liberté*
*Égalité*
*Fraternité*

METEO FRANCE

# CONCOURS EXTERNE SPÉCIAL POUR LE RECRUTEMENT D'ÉLÈVES INGÉNIEURS DES TRAVAUX DE LA MÉTÉOROLOGIE ET D'ÉLÈVES INGÉNIEURS DE L'ÉCOLE NATIONALE DE LA MÉTÉOROLOGIE

**SESSION 2022**

**************************************************************************************************

## ÉPREUVE ÉCRITE OBLIGATOIRE

## PHYSIQUE DE L'ATMOSPHÈRE

Durée : 4 heures — Coefficient : 8

La rigueur, le soin et la clarté apportés à la rédaction des réponses seront pris en compte dans la notation.
**L'utilisation d'une calculatrice de poche, standard, programmable, alphanumérique ou à écran graphique est autorisé** à condition que son fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante ni dispositif externe de stockage (cartes, clé usb, etc). **Elle devra être utilisée en mode examen.**
**L'utilisation de toute documentation sur support papier ou électronique est strictement interdite.**

**Documents fournis avec les copies : un émagramme.**

Cette épreuve aborde trois domaines différents :

— Partie I : MÉTÉOROLOGIE DYNAMIQUE pages 2 à 5 – 2 exercices – 7 points

— Partie II : MÉTÉOROLOGIE GÉNÉRALE pages 6 à 7 – 3 exercices – 7 points

— Partie III : COUCHE LIMITE pages 8 à 9 – 6 points

Le candidat doit traiter l'ensemble de l'épreuve.

**IMPORTANT : CHACUNE DES PARTIES I, II et III DOIT ÊTRE RÉDIGÉE SUR UNE COPIE SÉPARÉE**

Pour tout document annexe rendu avec la copie, le(la) candidat(e) portera sur celui-ci le nom du centre d'examen où il passe l'épreuve, le numéro de place occupée et la partie concernée. Aucune autre information d'identification ne devra être présente sur ces documents.
En haut et à gauche de chacune des copies doubles et des documents annexes, le(la) candidat(e) devra porter un numéro d'ordre (1/N, 2/N, N correspondant au nombre total de documents rendus)

***Ce sujet comporte 9 pages (page de garde incluse).***

# Partie I : MÉTÉOROLOGIE DYNAMIQUE

## Exercice 1 : équations du mouvement horizontal et applications

On se place ici dans l'approximation du plan tangent à la sphère et on utilise le système de coordonnées cartésiennes *x*, *y*, *z*. On considère que l'on se situe en dehors de la couche limite atmosphérique et on se place dans le cadre de l'approximation de la pellicule mince. Les équations du mouvement horizontal prennent la forme suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{Du}{Dt} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x} + fv \\ \dfrac{Dv}{Dt} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial y} - fu \end{cases} \qquad \text{avec :} \qquad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}$$

| |
|---|
| *$u = u\ (x, y, z, t)$ : vent zonal*<br>*$v = v\ (x, y, z, t)$ : vent méridien*<br>*$\rho = \rho\ (x, y, z, t)$ : masse volumique*<br>*$P = P\ (x, y, z, t)$ : pression*<br>*$f$ : paramètre de Coriolis* |

1. Rappeler l'expression du paramètre de Coriolis $f$ en fonction du module du vecteur rotation de la Terre $\Omega$ et de la latitude $\varphi$. Calculer la valeur de $f$ à 45 degrés nord. (On prendra $\Omega = 7{,}29\ 10^{-5}\ rad/s$).

2. On considère un petit déplacement $\delta\varphi$ autour d'une latitude de référence $\varphi_0$. Démontrer en utilisant les formules trigonométriques de base qu'un développement limité autour de cette latitude de référence permet d'écrire : $f = f_0 + \beta\ \delta\varphi$ avec $\beta = 2\Omega \cos(\varphi_0)/a$.

   *$f$ : valeur du paramètre de Coriolis à la latitude $\varphi$*
   *$f_0$ : valeur du paramètre de Coriolis à la latitude $\varphi_0$*
   *$a$ : rayon de la Terre*
   *$\delta y = a\delta\varphi$ : distance méridienne sur le plan tangent*

3. Calculer la valeur de $\beta$ à 45 degrés nord (on prendra $a=6400\ km$).

4. A l'échelle synoptique aux moyennes latitudes, quel terme de l'équation du mouvement horizontal peut être négligé (l'analyse en ordre de grandeur n'est pas demandée) ? Quelles sont les forces en quasi-équilibre sur l'horizontale ? Comment se nomme ce quasi-équilibre ?

5. Définir le vent géostrophique et établir ses expressions scalaires et vectorielle sur une surface isobare.
   *Rappel : le gradient horizontal de pression et le gradient isobare d'altitude géopotentielle sont liés par la relation suivante :*

$$\bar{\nabla}_z P = \rho g \bar{\nabla}_p z \qquad \text{avec } g = 9{,}8\ ms^{-2}$$

**6.** Établir que dans le cadre de l'approximation du $\beta$-plan la divergence du vent géostrophique sur une surface isobare s'écrit :

$$div\left(\vec{V}_g\right) = -\frac{\beta}{f} v_g$$

*$v_g$ désignant ici la composante méridienne du vent géostrophique.*

**7.** Définir le vent thermique d'une couche située entre le niveau isobare $P_B$ (indice B pour base) et le niveau isobare $P_S$ (indice S pour sommet) et établir son expression en fonction de $g$, $f$ et du gradient d'épaisseurs $\vec{\nabla}_P\left(z_S - z_B\right)$

**8.** À quel paramètre météorologique peut-on relier le champ d'épaisseurs de la couche 300 hPa - 500 hPa ? Quelle loi météorologique permet de faire ce lien ?

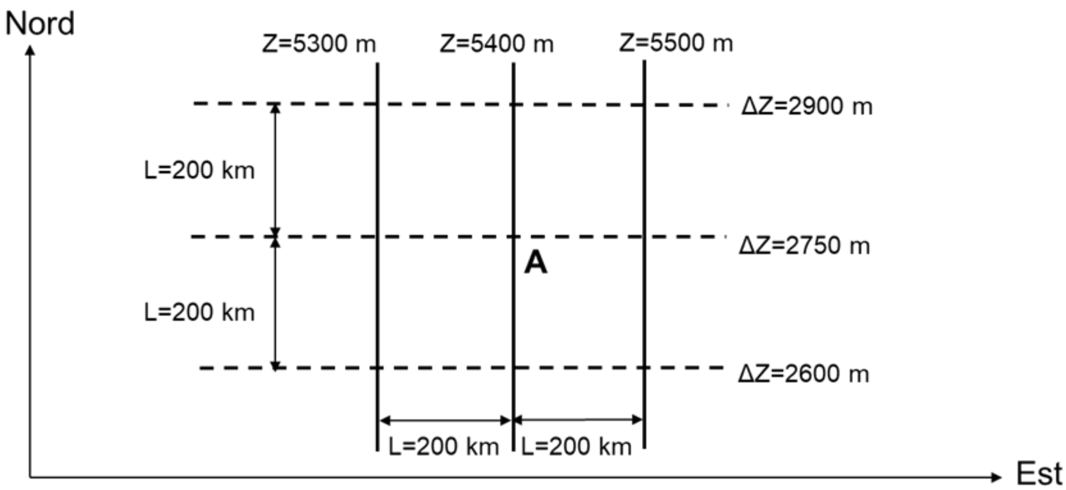
**9.** Établir que dans le cadre de l'approximation du $\beta$-plan le tourbillon (vertical) géostrophique s'écrit :

$$\xi_g = \frac{g}{f}\Delta_p(z) + \frac{u_g \beta}{f}$$

*$\Delta_p(z)$ désignant ici le laplacien isobare de z.*

**10.** L'expression du tourbillon géostrophique comprend deux termes. Quel est celui qui domine à grande échelle ? Le démontrer par une analyse en ordre de grandeur.

On considère la situation idéalisée ci-dessous avec les isohypses à 500 hPa (en traits pleins, espacés de 200 km) et les iso-épaisseurs de la couche 500-300 hPa (en tiretés, espacés de 200 km). Le point central A est situé sur la surface isobare à 500 hPa à la latitude 45N :



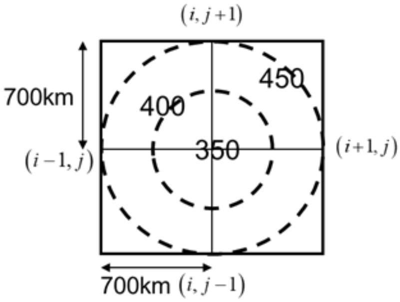

**11.** Quelle est la direction du vent géostrophique au point A ? Calculer sa norme.

**12.** Calculer la divergence du vent géostrophique au point A.

13. Quelle est la direction du vent thermique de la couche 500 hPa – 300 hPa à la verticale du point A ? Calculer sa norme.

14. En déduire la direction et la norme du vent géostrophique en un point B situé sur la surface isobare à 300 hPa à la verticale du point A.

On considère la situation idéalisée ci-dessous d'un champ d'altitude de la surface isobare à 925 hPa (en tiretés, côté en mètres) sur une grille bidimensionnelle à maille carrée de 700 km par 700 km. Le point central, d'altitude 350 m est à la latitude 45 degrés nord.




15. A l'ordre 2, une évaluation de la dérivée seconde d'un champ α peut s'écrire comme suit :

$$\left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2}\right)_i = \frac{1}{\Delta x^2}\left(\alpha_{i+1} + \alpha_{i-1} - 2\alpha_i\right)$$

En déduire une évaluation du tourbillon géostrophique au point central puis calculer sa valeur numérique.

## Exercice 2 : équation d'évolution du tourbillon

1. Rappeler la définition du vecteur tourbillon absolu et établir les expressions de ses composantes zonale, méridienne et verticale en fonction des dérivées spatiales de la vitesse dans le système de coordonnées cartésiennes *x*, *y*, *z*.

On considère l'équation vectorielle d'évolution du vecteur tourbillon absolu :

$$\frac{D\bar{\zeta}_a}{Dt} = \underbrace{-div\left(\overline{V_h}\right)\bar{\zeta}_a}_{A} \underbrace{-\frac{\bar{\nabla}P \times \bar{\nabla}\rho}{\rho^2}}_{B} \underbrace{+\frac{\partial \overline{V_h}}{\partial z} \wedge \bar{\nabla}_z w}_{C}$$

2. Comment se nomment classiquement les termes *A*, *B* et *C* ?

3. À partir de l'équation précédente, établir l'équation d'évolution de la composante verticale du tourbillon absolu (on notera *A' B'* et *C'* les nouveaux termes de cette équation équivalents aux termes *A B* et *C* de l'équation vectorielle).

On considère ici l'effet du terme *A'* sur l'évolution de la composante verticale du tourbillon absolu.

**4.** Soit un vortex cyclonique à la latitude 45 degrés nord de tourbillon relatif égal à $2\ 10^{-5}s^{-1}$ soumis à une convergence horizontale uniforme de $3\ 10^{-6}s^{-1}$ persistant pendant un jour. Calculer le tourbillon relatif du vortex après un jour.

**5.** Même question pour un vortex anticyclonique à la latitude 45 degrés nord de tourbillon relatif égal à $-2\ 10^{-5}s^{-1}$ et soumis à une divergence horizontale uniforme de $3\ 10^{-6}s^{-1}$ persistant pendant un jour.

**6.** Que peut-on conclure en comparant les deux résultats précédents ?

On considère à présent l'effet du terme *B'* sur l'évolution de la composante verticale du tourbillon absolu.

**7.** Faire un schéma de l'orientation sur l'horizontale des isobares et des isopycnes permettant la création de tourbillon vertical absolu positif.

On considère enfin l'effet du terme *C'* sur l'évolution de la composante verticale du tourbillon absolu.

**8.** Quel profil de vitesse verticale $w$ permet la création de tourbillon absolu négatif dans un environnement caractérisé par un vent méridien qui augmente avec l'altitude ?

# Partie II : MÉTÉOROLOGIE GÉNÉRALE

**Données :**
Constante de Stefan-Boltzmann : $\sigma = 5{,}67\ 10^{-8}$ W m$^{-2}$ K$^{-4}$
Constante spécifique de l'air sec : $R_a = 287$ J kg$^{-1}$ K$^{-1}$
Constante spécifique de la vapeur d'eau : $R_v = 461{,}5$ J kg$^{-1}$ K$^{-1}$
Accélération de la pesanteur : $g = 9{,}8$ m s$^{-2}$

## Exercice 1 : Refroidissement radiatif d'une surface continentale

1) La loi de Planck définit la distribution de luminance énergétique spectrale du rayonnement thermique émise par un corps noir en fonction de sa température thermodynamique. Définir ce que représente la luminance énergétique spectrale d'une surface. Quelle est son unité ?

2) Tracer l'allure de la luminance énergétique spectrale (également appelée fonction de Planck) en fonction de la longueur d'onde $\lambda$ pour deux températures différentes : 300 K et 6000 K. Vous ferez apparaître les principales caractéristiques de ces 2 courbes (maximum, asymétrie et domaine spectral).

3)a) Définir la loi de Wien et la loi de Stefan-Boltzmann.
b) Expliquer sans faire de calcul comment ces 2 lois découlent de la fonction de Planck.

On souhaite désormais étudier l'évolution de la température d'une surface continentale notée $T_S$ pendant la nuit. On suppose que la température de l'atmosphère notée $T_A$ reste constante.

4) Exprimer le flux radiatif (également appelé émittance) de la surface $\phi_S$ et celui de l'atmosphère $\phi_A$ (exprimés en W.m$^{-2}$) en fonction de $\sigma$, des émissivités $\varepsilon_s$ et $\varepsilon_A$ ainsi que des températures $T_S$ et $T_A$.

5) En supposant que la variation de température (noté $\delta T_S$) s'applique sur les dix premiers centimètres du sol (noté $\delta z$ = 10 cm), établir l'expression de la vitesse de refroidissement du sol $\frac{\delta T_s}{\delta t}$ exprimée en K s$^{-1}$ en fonction de $\phi_A$, $\phi_S$, $\delta z$ et C. La capacité calorifique du sol notée C, exprimée en J m$^{-3}$ K$^{-1}$, correspond à la quantité d'énergie nécessaire pour faire varier la température de 1 K par m³ de sol. Nous supposerons le flux de conduction dans le sol négligeable.

6) Calculer la variation de température de surface, en K h$^{-1}$ dans le cadre d'une atmosphère hivernale des moyennes latitudes par ciel clair ($T_A$ = -15 °C, $\varepsilon_A$ = 0,7), avec une température initiale de surface $T_S$ = 5 °C et une émissivité $\varepsilon_s$ = 0,95. On prendra C = 2 10$^6$ J m$^{-3}$ K$^{-1}$.

## Exercice 2 : Radiosondage à Québec

Un radiosondage effectué à Québec en début de matinée a permis de dresser le tableau suivant regroupant des mesures de pression P, de température T et de température de point de rosée $T_d$ à partir du sol.

| **P (hPa)** | 1000 | 950 | 900 | 850 | 800 | 750 | 600 | 500 | 400 | 300 | 200 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **T (°C)** | -3 | 0 | 2 | 2 | 1 | -1 | -8 | -15 | -23 | -35 | -40 |
| **$T_d$ (°C)** | -3 | 0 | 1 | 0 | -1 | -1 | -8 | -15 | -23 | -35 | -60 |

On désigne par $\theta'_w$ la température pseudo-adiabatique potentielle du thermomètre mouillé et $T'_w$ la température pseudo-adiabatique du thermomètre mouillé.

1) Sur l'émagramme, tracer en rouge la courbe d'état de ce radiosondage et en bleu la courbe reliant les points de coordonnées P et $T'_w$. Vous pourrez positionner les températures de point de rosée avec des croix noires.

2)a) En quoi le profil de température de la couche comprise entre 1000 hPa et 900 hPa est-il particulier ?
b) Comment appelle-t-on les couches présentant ce type de profil de température ?
c) Quel est probablement le phénomène météorologique présent proche de la surface ?

3) À partir de ce radiosondage, expliquer la situation météorologique et les phénomènes météorologiques qui pourraient se produire à Québec durant cette matinée.

## Exercice 3 : Thermodynamique atmosphérique

On appelle le rapport de mélange r d'une particule d'air humide, le rapport entre la masse de vapeur d'eau $m_v$ et la masse d'air sec $m_a$ soit $r=\frac{m_v}{m_a}$ .

1) En partant de la définition de r et en utilisant l'équation des gaz parfaits, montrer que $r=\frac{R_a}{R_v}\frac{e}{P-e}$ où P et e sont respectivement, la pression totale et la pression partielle de vapeur d'eau d'une particule d'air humide.

2) Définir la notion de température virtuelle $T_v$ d'une particule d'air humide et montrer que $T_v=\frac{1+\frac{R_v}{R_a}r}{1+r}T$ où T est la température de la particule, avec T et $T_v$ en K.

3) On évalue la pression de vapeur saturante par la formule de Tétens : $e_s(T)=6{,}107\,10^{\frac{a.T}{b+T}}$
Où $e_s(T)$ est exprimée en hPa, T la température en °C, avec a = 7,5 et b = 237,3 °C.

Un radiosondage a permis de dresser le tableau suivant regroupant des mesures de température T et de température de point de rosée $T_d$ au point A (au niveau de pression 1000 hPa) et au point B (au niveau de pression 700 hPa).

| | A | B |
|---|---|---|
| P (hPa) | 1000 | 700 |
| T (°C) | 22 | 4 |
| $T_d$ (°C) | 15 | -10 |

a) Calculer les températures virtuelles $T_{vA}$ et $T_{vB}$ situées en A et B.
b) Déduire la température virtuelle moyenne de la couche située entre A et B, que l'on notera $T_{vM}$.

4)a) En utilisant l'hypothèse de Laplace qui stipule que la température virtuelle varie en fonction du logarithme népérien de la pression, exprimer l'épaisseur Δz de la couche [1000 hPa ; 700 hPa] en fonction de $R_a$, $T_{vM}$, g, $P_A$ et $P_B$.
b) Calculer Δz.
c) Durant la journée, la température virtuelle de cette couche a augmenté de 12 °C. Estimer la nouvelle épaisseur de cette couche. Cette variation d'épaisseur est-elle logique ?

5)a) Expliquer, à l'aide d'une coupe verticale, ce qu'est une dépression thermique ?
b) Quelles sont les conditions météorologiques favorables à l'apparition d'une dépression thermique ?
c) Citer au moins un exemple de dépression thermique fréquemment présente dans l'hémisphère nord.
d) Comment varie le tourbillon relatif sur la verticale dans une dépression thermique située dans l'hémisphère nord ? Justifier.

# Partie III : COUCHE LIMITE

**Cycle diurne de la couche limite atmosphérique**

1) Définir et caractériser les différents compartiments principaux de la couche limite atmosphérique représentés sur la figure 1 : la couche mélangée, la couche de surface, la couche résiduelle, la couche limite stable et la zone d'entrainement.

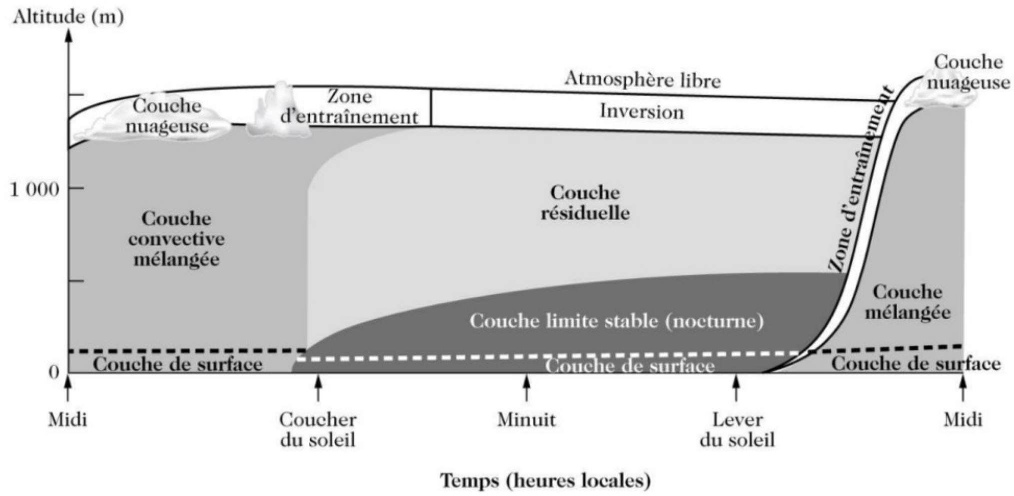



FIGURE 1 – Évolution diurne idéalisée de la structure verticale de la couche limite atmosphérique continentale sur terrain plat.

2) Déterminer les 4 paramètres météorologiques tracés sur la figure 2. Justifier. Définir les zones délimitées par les tiretés horizontaux.

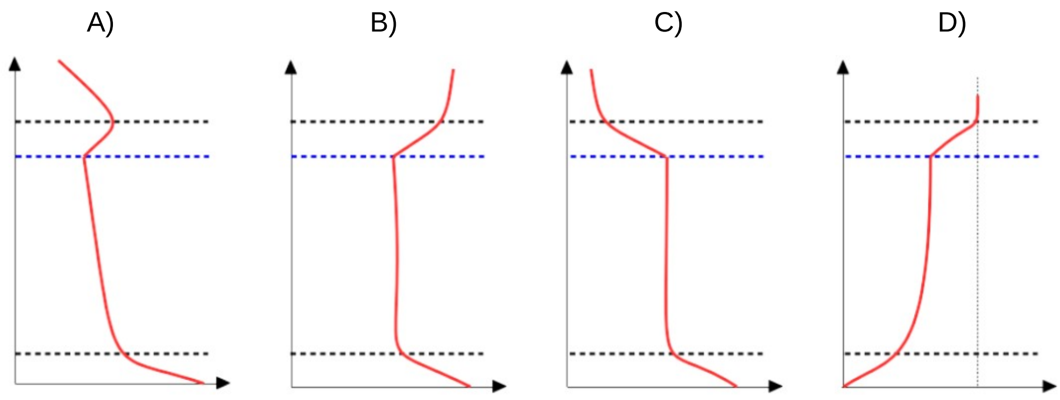



FIGURE 2 – Profils verticaux moyens de la couche limite atmosphérique continentale lors d'une journée ensoleillée.

3) Reproduire la figure 2 dans le cas d'une couche limite stable. Expliquer les différences de profils avec ceux de la couche limite instable.

**Coefficients d'échange turbulent dans la couche limite et couche limite de surface**

4) Donner l'équation d'évolution de l'énergie cinétique turbulente $e$ et nommer les différents termes.
5) Cette équation peut se simplifier en l'équation suivante :

$$0 = K_m \left[ \left( \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \overline{v}}{\partial z} \right)^2 \right] - \beta K_\theta \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial z} - \epsilon$$

Quelles hypothèses ont été utilisées pour obtenir l'équation ci-dessus ?
6) En supposant les coefficients d'échange turbulent $K_m = C_m L \sqrt{e}$ et $K_\theta = \alpha K_m$ et la dissipation de l'énergie cinétique turbulente $\epsilon = C_\epsilon \frac{e^{3/2}}{L}$ avec $L$ la longueur de mélange et $C_\epsilon$, $C_m$ et $\alpha$ des constantes, exprimer $K_m$ en fonction de la stabilité de l'atmosphère.
7) Rappeler la formulation du coefficient d'échange turbulent dans le modèle de Prandtl. Quel est l'avantage de la formulation dérivée à la précédente question par rapport à la formulation de Prandtl ?

**Estimation du flux de chaleur sensible $Q_0$ à la surface**

8) Rappeler la formulation de Monin-Obukhov des gradients $\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial z}$ et $\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}$ dans la couche limite de surface en fonction de $\zeta = z/L_{MO}$ où $L_{MO}$ est la longueur de Monin-Obukhov.
9) A partir de la définition du flux cinématique moyen de chaleur à la surface $Q_0$, exprimer $Q_0$ en fonction de $z$, $\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial z}$, $\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}$, $\phi_u(\zeta)$ et $\phi_\theta(\zeta)$.

On suppose $\overline{v} = 0$ et $\phi_\theta(\zeta) = \phi_u^2(\zeta)$ dans la couche limite de surface dans la suite de l'exercice.
10) Exprimer le nombre de Richardson gradient $Ri$ en fonction de $\zeta$.
11) Exprimer ainsi $Q_0$ en fonction de $z$, $\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial z}$, $\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}$ et $\phi_u(\zeta)$.
12) Application numérique.
Calculer $Q_0$ à $z = 20\ m$ en supposant $\phi_u(\zeta) = (1 - 15\zeta)^{-0.25}$, $\beta \approx 1/30\ ms^{-2}K^{-1}$, une augmentation du vent zonal de $0.2\ ms^{-1}$ tous les 10 mètres et un gradient de température de $-0.012\ Km^{-1}$.