Thermodynamique et effet de foehn

Dans cet exercice, on utilisera l'émagramme fourni pour déterminer les valeurs demandées.

On considère une particule d'atmosphère dont les conditions initiales sont les suivantes : pression : P_0 = 950 hPa, Température : T_0=8°C, Humidité : HU_0=80%.

Cette particule franchit un relief. Elle est soumise à un soulèvement orographique jusqu'au niveau de pression 600 hPa, puis une descente jusqu'au niveau de pression initial 950 hPa. On considère dans tout l'exercice que toute l'eau condensée précipite (hypothèse pseudo-adiabatique).

$C_p = 1004{,}5 J.kg^{-1}.K^{-1}$: chaleur massique à pression constante

$R_a = 287 J.kg^{-1}.K^{-1}$: constante universelle des gaz parfaits

ρ = densité (constante)

1) Pour les conditions initiales, déterminer le rapport de mélange, le rapport de mélange saturant, la température du point de rosée, la température potentielle, la température pseudo adiabatique potentielle du thermomètre mouillé et la température potentielle équivalente de la particule.

2) On rappelle l'équation d'évolution de la température $\frac{D(C_p T)}{Dt} = \frac{1}{\rho}\frac{Dp}{Dt} + \delta \dot{Q}$

   A partir de cette équation, déterminer l'expression de la température potentielle θ et retrouver, par le calcul, la valeur de θ déterminée graphiquement dans la question précédente.

3) Déterminer la pression et la température du point de condensation.

4) Déterminer la température des particules d'air ayant subi l'ascendance jusqu'au sommet du relief, ainsi que leur rapport de mélange.

5) Que valent la température, température du point de rosée et l'humidité relative des particules une fois redescendues à leur niveau initial? Commenter ce résultat.

Convection

On rappelle l'équation 3D du mouvement dans le système de Boussinesq :

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0}\vec{\nabla}\tilde{P} - f\,\vec{k}\wedge\vec{V} + B\vec{k}$$

$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}$

$\vec{V}(u,v,w)$: vecteur vent

$\rho_0 =$ densité (constante)

$\tilde{P} = \tilde{P}(x,y,z,t)$: anomalie de pression par rapport à une atmosphère de référence au repos

f : paramètre de Coriolis

$B =$ flottabilité

$\vec{k}$: vecteur unitaire selon la verticale

1) Démontrer que cette équation peut se mettre sous la forme :
$$\alpha_0\Delta p = -\mathrm{div}(\vec{V}.\vec{\nabla}\vec{V}) + \frac{\partial B}{\partial z} - \mathrm{div}(f\vec{k}\wedge\vec{V})$$

2) On note $\xi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$, le tourbillon relatif vertical et $\beta = \frac{df}{dy}$, l'effet β. Montrer que l'équation précédente s'écrit :
$$\alpha_0\Delta p = -\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right] - 2\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}\right) + \frac{\partial B}{\partial z} + f\xi - \beta u$$

3) A l'échelle de la convection, on néglige les termes de Coriolis β. Etablir que le Laplacien de la perturbation de pression s'écrit :
$$\alpha_0\Delta p = -e^2_{ij} + \frac{1}{2}\left|\vec{\omega}\right|^2 + \frac{\partial B}{\partial z}$$

Indication : on note $\vec{\omega}$ *le vecteur tourbillon*

$$e^2_{ij} = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)^2$$ *le tenseur de déformation,*

avec $\left|\begin{array}{l} u_1 = u, u_2 = v, u_3 = w \\ x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z \end{array}\right.$

4) Dans cette question, on considère l'impact de la flottabilité sur la perturbation de pression $\frac{1}{\alpha_0}\frac{\partial B}{\partial z}$.

Dans un nuage convectif en phase de développement, quelle est la perturbation de pression à la base et au sommet du nuage ? Quelles sont les conséquences sur la vitesse verticale ?.

5) On considère à présent le terme de perturbation de pression associé à la dynamique $\frac{1}{\alpha_0}\left(-e^2_{ij}+\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\omega}\right|^2\right)$

On décompose le vent en la somme de deux termes, vent moyen (qui représente le vent de l'environnement) et écart par rapport à cette moyenne (perturbations) c'est-à-dire :

$$\left|\begin{array}{l} u=\bar{u}+u' \\ v=\bar{v}+v' \\ w=w' \end{array}\right.$$

Montrer que la perturbation de pression associée à la dynamique est proportionnelle au trois termes suivants : $p_d \propto e'^2_{ij}-\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\omega'}\right|^2+2\left(\frac{\partial w'}{\partial x}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}+\frac{\partial w'}{\partial y}\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right)$

avec $\overrightarrow{\omega'}$ *le vecteur tourbillon associé aux perturbations*

$e'^2_{ij}=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u'_j}{\partial x_i}\right)^2$ *le tenseur de déformation associé aux perturbations*

6) En déduire que les termes linéaires de la perturbation de pression s'expriment selon l'équation $p_d=2\vec{S}.\vec{\nabla}w'$

On note $\vec{S}=\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z},\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right)$: le cisaillement de vent de l'environnement.

7) *Application :*

On considère un nuage convectif idéalisé, symétrique et homogène. On se place dans le plan (O,x,z), la vitesse verticale suit la fonction suivante (on ne tient pas compte des variations en y) :

$$w'(x,z)=\frac{w'_{max}}{R^2}\left(R^2-x^2\right)\frac{z}{z_{max}}, \quad .$$

Cette fonction est valable pour $-R\le x\le R$ et pour $0\le z\le z_{max}$.

z_{max} est l'altitude où la vitesse verticale est maximale et vaut w_{max}.

A une altitude donnée, l'ascendance est maximale au centre du cylindre (en x=0) comme décrit dans la figure ci-dessous :

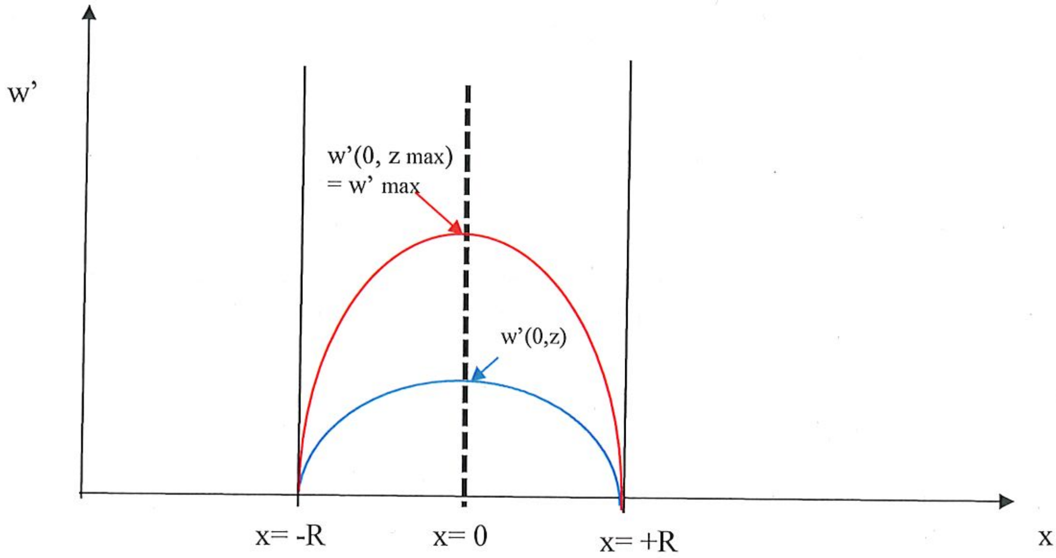


fig 2) Profil de vitesse verticale w' à une altitude z (en bleu) et à z =z max (en rouge)

On suppose le cisaillement vertical de vent de l'environnement, constant et positif : $\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \alpha_1$

- Déterminer, en fonction de $x, z, w'_{\max}, R^2$, et $z_{\max}$, l'expression de la perturbation de pression associée à la dynamique $\mathrm{p_d}(x,z)$ qui s'exerce sur les bords du nuage.
- Pour une altitude donnée, quel est le signe de $\mathrm{p_d}$ en amont et en aval du cisaillement ?
- Décrire les variations de $\mathrm{p_d}(x,z)$ avec l'altitude, en aval et en amont du cisaillement (x fixé).
- En déduire, l'existence d'ascendances en aval du cisaillement. Faire le lien avec le modèle conceptuel d'une ligne de grain.

Exercice III : COUCHE LIMITE

Exercice 1

Dans une couche limite atmosphérique (CLA) neutre, on considère deux surfaces différentes :
(i) une zone urbaine dense avec des bâtiments de taille moyenne de 20m, soit une hauteur de déplacement z_d = 15m et z_0 = 0.9m,
(ii) une zone rurale avec z_0 = 0.2m.

1) Exprimer le vent moyen près de la surface en fonction de u_*, z, z_d, et z_0. Rappeler la signification de u_* et z_0.

2) Avec u_* = 0.4m/s, calculer la vitesse du vent moyen à une altitude z = 20m pour les deux surfaces. Comparer les valeurs obtenues si on ne tient pas compte de la hauteur des bâtiments en ville.

3) La théorie de similitude de Monin-Obukhov généralise l'expression du gradient vertical du vent moyen proche de la surface à l'aide d'une fonction ϕ_u. Rappeler l'expression de $\dfrac{\partial \overline{u}}{\partial z}$ en fonction de ϕ_u.

4) Dans la CLA stable, au voisinage de la neutralité, on suppose l'approximation suivante :

$\phi_u = C_1 + C_2 \dfrac{z}{L_{MO}}$ avec C_1 et C_2 des constantes et L_{MO} la longueur de Monin-Obukhov :

$L_{MO} = \dfrac{-u_*^3}{\beta \kappa Q_o}$ avec $\beta = g/\theta_0$, κ la constante de Von Karman et Q_0 le flux de chaleur à la surface.

a) Quelle est l'unité de Q_0 ?
b) Exprimer le vent u(z) dans la CLA stable en fonction de C_1, C_2, κ, Q_0, β, z_0 et u_*.

Exercice 2

L'équation d'évolution de l'énergie cinétique turbulente (ECT) moyenne ***e*** peut s'écrire :

$$\underbrace{\frac{\partial e}{\partial t}}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\overline{u_k}\frac{\partial e}{\partial x_k}}_{\mathrm{II}} = \underbrace{-\frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{eu'_k})}_{\mathrm{III}} \underbrace{-\frac{1}{\rho_0}\overline{u'_k\frac{\partial p'}{\partial x_k}}}_{\mathrm{IV}} \underbrace{-\overline{u'_i u'_k}\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k}}_{\mathrm{V}} + \underbrace{\frac{g}{\theta_0}\overline{w'\theta'}}_{\mathrm{VI}} + \underbrace{\nu\frac{\partial^2 e}{\partial x_k^2}}_{\mathrm{VII}} \underbrace{-2\nu\overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k}\frac{\partial u'_i}{\partial x_k}}}_{\mathrm{VIII}} \quad (1)$$

avec
u_i la $i^{ème}$ composante du vent
p la pression atmosphérique
θ_0 la température potentielle de référence
ρ_0 la masse volumique de référence
ν le coefficient de viscosité cinématique de l'air

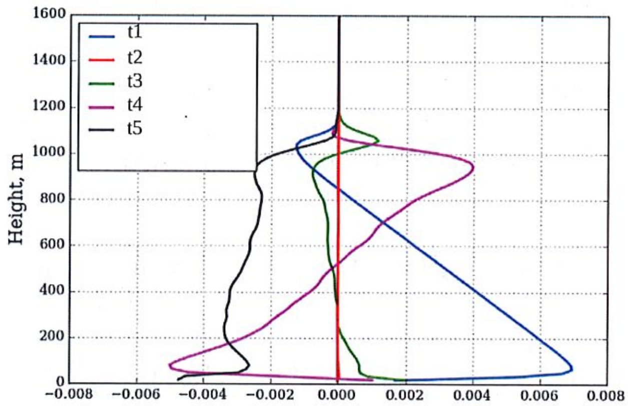
1) a) Rappeler la définition de l'énergie cinétique turbulente et la signification des termes de son équation d'évolution (1).
b) Énoncer en quelques phrases la méthode pour obtenir (1) (ne pas le démontrer).
c) Discuter du signe des termes (V), (VI) et (VIII).

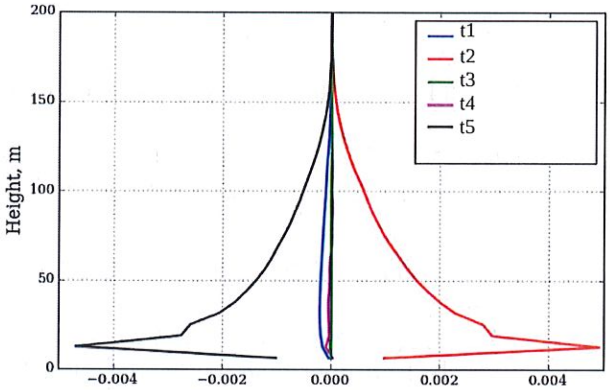
2) Dans une CLA homogène horizontalement, *relativement dégagée des obstacles en surface,* l'équation (1) se réduit à la forme suivante :

$$\underbrace{\frac{\partial e}{\partial t}}_{\mathrm{A}} = \underbrace{-\frac{\partial \overline{ew'}}{\partial z}}_{\mathrm{B}} \underbrace{-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \overline{p'w'}}{\partial z}}_{\mathrm{C}} + \underbrace{P_d}_{\mathrm{D}} + \underbrace{\frac{g}{\theta_0}\overline{w'\theta'}}_{\mathrm{E}} \underbrace{-\epsilon}_{\mathrm{F}} \qquad (2)$$

Démontrer en justifiant le passage de l'équation (1) à (2) et exprimer P_d et ε. On supposera le fluide incompressible.

3) L'importance relative des termes de l'équation d'évolution de l'ECT est très différente selon la stratification de la CLA.
À l'état stationnaire, les profils verticaux des termes de l'équation (2) sont tracés ci-dessous pour une CLA convective sèche libre sans vent moyen (gauche) et une CLA stable (droite).





Bilan de l'ECT dans une couche limite convective sèche libre (*sans vent moyen*)

Bilan de l'ECT dans une couche limite stable

a) Quelle est l'unité des termes de l'équation (2) ?
b) Quelle est la principale source de turbulence dans une couche limite convective ? Dans une couche limite stable ?
c) Associer les différents termes de l'équation (2) aux courbes t1 à t5 ci-dessus. Justifier. Remarque : les termes sont les mêmes entre la couche convective et stable.
d) À partir des graphiques ci-dessus, estimer la hauteur de la CLA convective et stable. Expliquer physiquement cette différence.

4) En 1920, Lewis Fry Richardson définit un nombre sans dimension caractéristique du régime de la turbulence à partir de l'équation de l'ECT.
a) À partir de l'équation (2) à l'état stationnaire, exprimer ce nombre en négligeant les termes B, C et F.
b) Énoncer les régimes de turbulence en fonction des valeurs de ce nombre.

5) En admettant l'hypothèse des K-gradients que vous rappellerez, avec des coefficients de diffusion K = 1 m²/s, retrouver l'expression du nombre de Richardson gradient Ri_g à partir de la question 4a) tel que $Ri_g = N^2/S^2$ où N est la fréquence de Brunt-Väisälä et S le cisaillement vertical du vent horizontal.

6) En modélisation numérique, les flux turbulents sont souvent paramétrés via une longueur de mélange L_m. On admet que l'équation (2) peut s'écrire de la manière suivante avec un vent aligné selon l'axe zonal (soit v = 0) :

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{4}{15}\frac{L_m}{C_{pv}}\sqrt{e}\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}\right)^2 - \frac{2}{3}\beta\frac{L_m}{C_{p\theta}}\sqrt{e}\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial z}\left(1 + C_1\beta\frac{L_m^2}{e}\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial z}\right)^{-1} - C_\epsilon\frac{e^{3/2}}{L_m}$$

avec $\beta = g/\theta_0$ et C_{pv}, $C_{p\theta}$, C_1, C_ε des constantes.
Dans une couche limite stratifiée stablement de manière uniforme, on peut admettre que $L_m = \sqrt{\dfrac{2e}{\beta\dfrac{\partial\overline{\theta}}{\partial z}}}$

a) Montrer l'existence d'un nombre de Richardson gradient critique $Ri_{g,cr}$ à partir duquel une stratification supérieure entraine une destruction du mélange turbulent dans ce modèle.
b) Calculer cette valeur avec $C_{pv} = 2.11$, $C_{p\theta} = 4.65$, $C_1 = 0.12$, $C_\varepsilon = 0.85$. Commenter.