CONCOURS INTERNE POUR LE RECRUTEMENT

D'ÉLÈVES INGÉNIEURS DES TRAVAUX DE LA MÉTÉOROLOGIE

SESSION 2019

****

ÉPREUVE ÉCRITE OBLIGATOIRE

MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures Coefficient : 4

La rigueur du raisonnement et la clarté de la présentation seront prises en compte dans la notation.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'épreuve de Mathématiques comporte deux problèmes indépendants :

Problème numéro 01 : 12 points

Problème numéro 02 : 08 points

Cette épreuve comporte 5 pages (page de garde incluse).

Météo-France, établissement public administratif
Direction des ressources humaines
73, avenue de Paris 94165 Saint-Mandé Cedex

Problème 01

Dans tout le problème, I est l'intervalle $[1, +\infty[$.
On note $\mathcal{E}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues et bornées sur I à valeurs réelles, et $\mathcal{E}_1 = C^1(I, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de fonctions de classe C^1 sur I à valeurs réelles.
Lorsque V est un endomorphisme de $\mathcal{E}$, on rappelle que $V^0 = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ et que si n est un entier naturel non nul, $V^n = \underbrace{V \circ \cdots \circ V}_{n}$.

Soit a un **réel strictement positif**.
Pour tout f de $\mathcal{E}$, on considère l'équation différentielle sur I :

$$y' - ay + f = 0 \qquad (E_a^f).$$

1. Étude de l'équation (E_a^f).
   (a) Soient $f \in \mathcal{E}$ et $z \in \mathcal{E}_1$.
   Montrer que z est solution de (E_a^f) si et seulement s'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que :
   $$\forall x \in I, \quad z(x) = e^{ax}\left(K - \int_1^x e^{-at} f(t)\, dt\right).$$
   (b) Prouver, en raisonnant par l'absurde, que s'il existe une solution de (E_a^f) qui soit bornée sur I, alors celle-ci est unique.
   (c) Vérifier que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-at} f(t)\, dt$ est convergente.
   (d) Démontrer que la fonction $F : x \in I \mapsto e^{ax} \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-at} f(t)\, dt$ est l'unique solution de (E_a^f) bornée sur I.

   On définit ainsi une application U_a de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui à toute fonction f de $\mathcal{E}$ associe la fonction $F = U_a(f)$ ainsi obtenue.
2. Étude de quelques propriétés de U_a.
   (a) Expliciter $U_a(f)$ lorsque f est la fonction constante égale à 1.
   (b) Vérifier que U_a est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.
   (c) i. L'endomorphisme U_a est-il injectif ?
   ii. Montrer que pour tout f élément de $\mathcal{E}$, $U_a(f) \in \mathcal{E}_1$.
   iii. L'endomorphisme U_a est-il surjectif ?
   (d) **On suppose dans cette question et uniquement dans cette question que $a = 1$.**
   Montrer que le sous-espace de $\mathcal{E}$: $\mathcal{F} = \mathrm{Vect}(\sin, \cos)$ est stable par U_1.
   Vérifier que $\mathcal{B} = \{\sin, \cos\}$ est une base de $\mathcal{F}$.
   Écrire alors la matrice M de la restriction de U_1 à $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{B}$.
   Prouver que $M = \lambda\Omega$, où λ est un réel positif et Ω une matrice de rotation dont on déterminera l'angle.

3. <u>On revient au cas général.</u>

   (a) Pour $r \in [0, +\infty[$, on note f_r la fonction de $\mathcal{E}$ définie par : $x \mapsto e^{-rx}$.
   Déterminer $U_a(f_r)$.

   (b) Soit $\lambda \in \left]0; \frac{1}{a}\right]$. Le réel λ est-il valeur propre de l'endomorphisme U_a ?

   (c) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(U_a^n(f_r))_{n\in\mathbb{N}}$ sur I.

   (d) Étudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} U_a^n(f_r)$ sur I et déterminer sa somme lorsqu'elle converge. Étudier sa convergence uniforme sur I.

4. Prouver que l'on a, pour tout élément f de $\mathcal{E}$:

$$\forall x \in I, \quad U_a(f)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-at} f(x+t)\, dt.$$

5. Pour tout entier naturel k, on note g_k la fonction de $\mathcal{E}$ définie par : $g_k(x) = e^{-x}x^k$ et on note $G_k = U_a(g_k)$.
   Pour tout entier naturel p, on note $\mathcal{F}_p = \mathrm{Vect}(g_0, \dots, g_p)$.

   (a) Donner une base $\mathcal{B}_p$ de $\mathcal{F}_p$.

   (b) Vérifier que $\mathcal{F}_p$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ stable par U_a.

   (c) Calculer le déterminant de la restriction de U_a à $\mathcal{F}_p$.

6. Prouver que l'on a : $\forall f \in \mathcal{E}$, $|U_a(f)| \leqslant U_a(|f|)$.

7. Soit f dans $\mathcal{E}$ à valeurs positives. En est-il de même pour $U_a(f)$?

8. Soit f dans $\mathcal{E}$ décroissante. Prouver que $aU_a(f) \leqslant f$ puis que $U_a(f)$ est décroissante.

9. On note :
   - $\mathcal{H}$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{E}$ de classe C^1 sur I et tels que f' est bornée sur I.
   - D l'opérateur de dérivation sur $\mathcal{H}$.

   Soit $f \in \mathcal{H}$.

   (a) Montrer que l'on a : $U_a(f') - aU_a(f) + f = 0$.

   (b) En déduire que U_a et D commutent dans $\mathcal{H}$.

10. Soit $f \in \mathcal{E}$. Vérifier que pour tout entier naturel n, $U_a^{n+1}(f)$ est la fonction

$$x \mapsto e^{ax} \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} f(t)\, dt.$$

   On pourra procéder par intégration par parties.

11. Soit $f \in \mathcal{E}$.
   <u>On suppose dans cette question et uniquement dans cette question : $a > 1$.</u>

   (a) Soient $x \in I$ et t un réel supérieur ou égal à x. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} f(t) \right)$.

   (b) Montrer que pour tout entier naturel n : $\int_0^{+\infty} u^n e^{-u}\, du = n!$

   (c) Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} U_a^n(f)$ est simplement convergente sur I.
   On notera S sa somme.

   (d) Démontrer qu'il existe un réel $b > 0$ tel que $S = U_b(f)$.

Problème 02

Bien que la partie I illustre un cas particulier d'une problématique plus générale développée dans la partie II, les deux parties peuvent être traitées indépendamment.

Partie I

On considère les matrices carrées

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Les matrices A et B sont-elles diagonalisables dans $\mathbb{R}$?
2. Calculer A^2.
3. Déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que :
$$A = PDP^{-1}.$$
(On choisira P de manière que sa première ligne ne soit composée que de 1.)
4. Retrouver sans calcul que B est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.
5. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis B^n.

Partie II

On considère maintenant un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ de dimension finie.
Pour un endomorphisme f de E, f^2 désigne toujours $f \circ f$.
La notation Id_E désigne l'endomorphisme identité de E.

1. Soit f, g deux endomorphismes de E tels que : $f \circ g = 0$.
Montrer que $\mathrm{Im}\,(g) \subset \ker\,(f)$.
2. On suppose dans cette question que f est un endomorphisme diagonalisable de E.
On désigne par $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, avec $p \in \mathbb{N}^*$, ses valeurs propres.
   (a) Montrer que, pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
   $$(f - \alpha Id_E) \circ (f - \beta Id_E) = (f - \beta Id_E) \circ (f - \alpha\beta Id_E).$$
   (b) Montrer que, pour tout vecteur propre v de f, on a
   $$(f - \lambda_1 Id_E) \circ \cdots \circ (f - \lambda_p Id_E)\,(v) = 0.$$
   (c) Soit $x \in E$ un vecteur quelconque. En décomposant x dans une base bien choisie, montrer que
   $$(f - \lambda_1 Id_E) \circ \cdots \circ (f - \lambda_p Id_E)\,(x) = 0.$$

3. On suppose dans cette question que f est un endomorphisme de E tel que

$$(f - \alpha Id_E) \circ (f - \beta Id_E) = 0 \quad (\star)$$

pour des réels α et β distincts.

(a) Déterminer deux réels a et b tels que :

$$a\,(f - \alpha Id_E) + b\,(f - \beta Id_E) = Id_E.$$

(b) En déduire que :

$$E = \operatorname{Im}(f - \alpha Id_E) + \operatorname{Im}(f - \beta Id_E).$$

(c) Montrer successivement :

$$\operatorname{Im}(f - \beta Id_E) \subset \ker(f - \alpha Id_E) \text{ et } \operatorname{Im}(f - \alpha Id_E) \subset \ker(f - \beta Id_E).$$

(d) Montrer que :

$$E = \ker(f - \alpha Id_E) + \ker(f - \beta Id_E).$$

(e) Montrer que :

$$E = \ker(f - \alpha Id_E) \oplus \ker(f - \beta Id_E).$$

(f) En déduire que f est diagonalisable.
(On pourra distinguer plusieurs cas selon que l'un des deux noyaux est réduit à $\{\vec{0}\}$ ou non.)

4. On suppose dans cette question que f est un endomorphisme de E tel que f^2 est diagonalisable et a toutes ses valeurs propres strictement positives.
On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ ces valeurs propres.

(a) Pour $1 \leqslant k \leqslant p$, on note F_k le sous-espace propre de f^2 associé à la valeur propre λ_k.
Montrer que, pour tout $k \in \{1, \ldots, p\}$, F_k est stable par f.

(b) Pour $1 \leqslant k \leqslant p$, on note f_k la restriction de f à F_k et on pose $\mu_k = \sqrt{\lambda_k}$.
Montrer que :

$$(f_k + \mu_k Id_{F_k}) \circ (f_k - \mu_k Id_{F_k}) = 0.$$

(c) En déduire que f_k est diagonalisable.

(d) Pour $1 \leqslant k \leqslant p$, on note $F_k^+ = \ker(f_k + \mu_k Id_{F_k})$ et $F_k^- = \ker(f_k - \mu_k Id_{F_k})$.
Montrer que

$$E = F_1^+ \oplus F_1^- \oplus \cdots \oplus F_p^+ \oplus F_p^-.$$

En déduire que f est diagonalisable.