RÉPUBLIQUE FRANÇAISE
Liberté Égalité Fraternité

METEO FRANCE

CONCOURS EXTERNE SPÉCIAL POUR LE RECRUTEMENT
D'ÉLÈVES INGÉNIEURS DES TRAVAUX DE LA MÉTÉOROLOGIE
ET
D'ÉLÈVES INGÉNIEURS DE L'ÉCOLE NATIONALE DE LA MÉTÉOROLOGIE
SESSION 2023

****

ÉPREUVE ÉCRITE OBLIGATOIRE

PHYSIQUE DE L'ATMOSPHÈRE

Cette épreuve aborde trois domaines différents :

Météorologie dynamique, partie I – 5 pages – 7 points
Météorologie générale, partie II – 2 pages – 7 points
Couche limite, partie III – 1 page – 6 points

Durée : 4 heures — Coefficient : 8

La rigueur, le soin et la clarté apportés à la rédaction des réponses seront pris en compte dans la notation.
L'utilisation d'une calculatrice de poche, standard, programmable, alphanumérique ou à écran graphique est autorisé à condition que son fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante ni dispositif externe de stockage (cartes, clé usb, etc). **Elle devra être utilisée en mode examen.**
L'utilisation de toute documentation sur support papier ou électronique est strictement interdite.

Documents fournis avec les copies : deux émagrammes pour la partie II

Le candidat doit traiter l'ensemble de l'épreuve.

IMPORTANT : CHACUNE DES PARTIES I, II et III DOIT ÊTRE RÉDIGÉE SUR UNE COPIE SÉPARÉE

Pour tout document annexe rendu avec la copie, le candidat portera sur celui-ci le nom du centre d'examen où il passe l'épreuve, son numéro de candidat inscrit sur sa convocation et la partie concernée. Aucune autre information d'identification ne devra être présente sur ces documents.
En bas et à droite de chacune des copies doubles et des documents annexes, le candidat devra porter un numéro d'ordre (1/N, 2/N, N correspondant au nombre total de documents rendus)

Ce sujet comporte 9 pages (page de garde incluse)

Météorologie dynamique

Partie 1 : QCM

1. Le poids est par définition :
- **a.** la force d'attraction gravitationnelle
- **b.** la résultante de la force d'attraction gravitationnelle et de la force d'inertie de Coriolis
- **c.** la résultante de la force d'attraction gravitationnelle et des frottements
- **d.** la résultante de la force d'attraction gravitationnelle et de la force d'inertie d'entraînement liée à la rotation de la Terre sur elle-même

2. Le poids
- **a.** passe par le centre de gravité de la Terre, et définit la verticale locale (au sens du fil à plomb)
- **b.** passe par le centre de gravité de la Terre, mais ne définit pas la verticale locale (au sens du fil à plomb)
- **c.** le poids ne passe pas par le centre de gravité de la Terre ; en revanche, il définit bien la verticale locale.
- **d.** le poids ne passe pas par le centre de gravité de la Terre, et par conséquent ne définit pas la verticale locale.

3. Pour un vent horizontal donné, la norme de la composante horizontale de la force de Coriolis
- **a.** décroît linéairement en allant vers les pôles
- **b.** est maximale aux moyennes latitudes
- **c.** est maximale aux pôles
- **d.** ne dépend pas de la latitude.

4. La force d'inertie de Coriolis fait varier l'énergie cinétique des particules d'air.
- **a.** Vrai
- **b.** Faux

5. L'équilibre hydrostatique est un équilibre entre
- **a.** la force de pression horizontale et la force de Coriolis horizontale
- **b.** le poids et la force de pression vertical
- **c.** la force de pression verticale et la force de Coriolis
- **d.** le poids et la force de Coriolis

6. L'équilibre hydrostatique est valide
- **a.** à l'échelle aérologique
- **b.** à toutes les échelles météorologiques
- **c.** pour des phénomènes météorologiques d'échelle horizontale supérieure à l'échelle verticale (rapport d'aspect H/L << 1)
- **d.** pour des phénomènes météorologiques d'échelle horizontale inférieure à l'échelle verticale (rapport d'aspect H/L >> 1)

7. L'équilibre géostrophique est un équilibre entre
- **a.** la force de pression horizontale et la force de Coriolis horizontale
- **b.** la force de pression verticale et le poids
- **c.** la force de Coriolis horizontale et les frottements
- **d.** la force de pression verticale et la force de Coriolis verticale

8. L'équilibre géostrophique est valide si
- **a.** le nombre de Rossby $R_0 = U/fL \gg 1$
- **b.** le nombre de Rossby $R_0 = fL/U \gg 1$
- **c.** le nombre de Rossby $R_0 = U/fL \ll 1$
- **d.** le nombre de Rossby $R_0 = U^2/fL \ll 1$

9. Le vent géostrophique est une bonne approximation du vent horizontal réel
- **a.** aux moyennes latitudes, à grande échelle, hors couche limite atmosphérique.
- **b.** aux moyennes latitudes, à l'échelle aérologique et dans la couche limite atmosphérique.
- **c.** dans les tropiques, c'est une bonne estimation du vent dans les cyclones tropicaux en particuliers
- **d.** aux moyennes latitudes, à grande échelle, dans la couche limite atmosphérique

10. Le géostrophisme suppose que
- **a.** l'accélération verticale et les frottements sont négligés
- **b.** l'accélération horizontale et la force de pression horizontale sont nuls
- **c.** l'accélération horizontale et les frottements sur l'horizontale sont nuls
- **d.** l'accélération horizontale et la force de Coriolis horizontale sont négligés

11. L'équilibre du vent thermique relie
- **a.** la variation zonale du vent à la variation verticale de la température
- **b.** le cisaillement vertical de vent à la variation verticale de la température
- **c.** le cisaillement vertical de vent à la variation horizontale de température
- **d.** la variation zonale du vent à la variation méridienne de la température

12. L'équilibre du vent thermique permet de comprendre
- **a.** qu'on observe à la tropopause, aux moyennes latitudes, un maximum de vent d'ouest dans l'hémisphère Nord et d'Est dans l'hémisphère Sud
- **b.** qu'on observe aux moyennes latitudes un très faible cisaillement vertical de vent
- **c.** qu'on observe un maximum de vent d'ouest à la tropopause, aux moyennes latitudes, dans les deux hémisphères.
- **d.** qu'on observe de façon générale dans les régions tropicales un très fort cisaillement vertical de vent

Partie 2 : approche analytique des variations méridiennes de température et du bilan radiatif

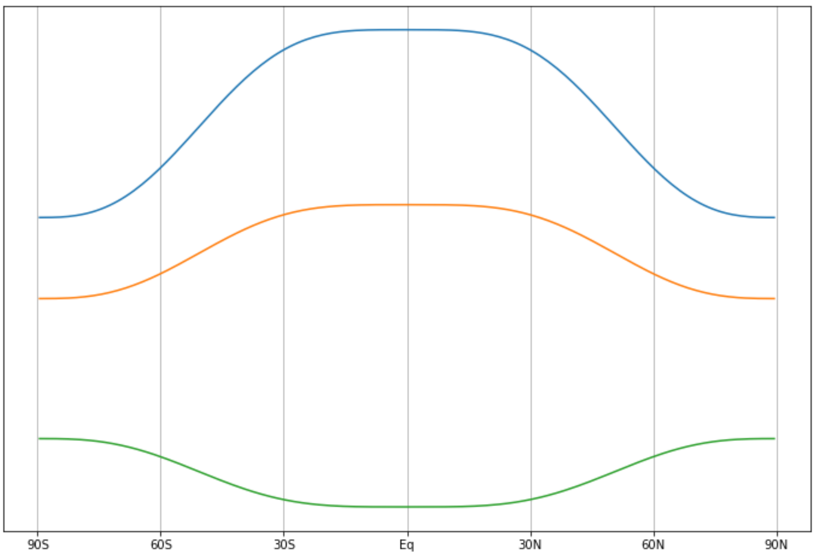
On considère l'expression suivante qui est une bonne approximation analytique des variations méridiennes (suivant la latitude φ) de la température en moyenne zonale T (unité : °C) :

$$T(\varphi) = a + b\left[cos^3(\varphi)\left(1 + \frac{3}{2}sin^2(\varphi)\right)\right]$$

$a = a_1 - \gamma z$ (z désigne l'altitude en km)
avec $a_1 = -12°C$ et $\gamma = 3{,}14°C\ km^{-1}$.
$b = b_1\left(1 - \frac{z}{z_T}\right)$ (z désigne l'altitude en km)
avec $z_T = 11\ km$ (hauteur moyenne de la troposphère)
$b_1 = 40°C$ (différence de température équateur-pôle)

1. Appliquer les formules ci-dessus pour calculer, à la latitude 47°N, la température T_0 en surface, la température T_m à $z = 5{,}5\ km$ et la température T_h à $z = 15\ km$.

2. En déduire sur le graphique ci-dessous les courbes correspondant à $T_0(\varphi)$, $T_m(\varphi)$ et $T_h(\varphi)$ (les valeurs de l'axe des ordonnées sont ici volontairement masquées).



3. Démontrer que le gradient méridien de température $\frac{\partial T}{\partial y}$ s'écrit :

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{R\partial\varphi} = -b\left(\frac{15}{2} * \frac{1}{R}\right)sin^3(\varphi)cos^2(\varphi)$$

y : distance dans la direction méridienne ; R : rayon de la Terre ($R = 6371\ km$).

4. Calculer $\frac{\partial T}{\partial y}$ à la latitude 47°N, en surface et à $z = 15\ km$.

5. Comment évolue $\frac{\partial T}{\partial y}$ entre la surface et $z = 15\ km$? Comment l'expliquer ?

On cherche à présent à construire un modèle analytique du bilan radiatif du système Terre-atmosphère :

- On estime les variations méridiennes du rayonnement solaire incident en moyenne zonale E_{sol} par la formule suivante :

$$E_{sol} = E_0 + E_1 cos(2\varphi)$$

$$\text{avec } E_0 = 298\ Wm^{-2} \text{ et } E_1 = 123\ Wm^{-2}$$

- On estime les variations méridiennes du rayonnement solaire absorbé E_{in} par la formule suivante :

$$E_{in} = E_{sol} - 110\ Wm^{-2}$$

- On considère l'émission du système Terre-atmosphère E_{out} comme celle d'un corps gris à la température T_m (en Kelvin) caractéristique du milieu de troposphère (altitude 5,5 km) calculée à la question 1 :

$$E_{out} = \varepsilon \sigma T_m^4$$

$\varepsilon = 0,9$ (émissivité)
$\sigma = 5,67 * 10^{-8}\ Wm^{-2}K^{-4}$ (constante de Stefan-Boltzmann)

6. Calculer E_{sol}, E_{in} et E_{out} à la latitude 47°N puis à la latitude 10°N. En déduire le rayonnement net E_{net} à 47°N puis à 10°N.

7. Commenter les valeurs de E_{net} obtenues à la lumière de vos connaissances sur le bilan radiatif du système Terre atmosphère.

8. Le chauffage différentiel D_φ se calcule en multipliant les valeurs de rayonnement net par la circonférence du cercle de latitude à la latitude considérée. Calculer D_φ à 47°N.

Le transport méridien de chaleur T_r nécessaire pour que la circulation globale compense le déséquilibre radiatif au nord d'une latitude φ est donné par la formule suivante :

$$T_r(c) = \sum_{\varphi_0 = 90°N}^{\varphi} -D_\varphi\ \Delta y$$

$$\text{avec } \Delta y(km) = 111\ km/° \times \Delta\varphi(°)$$

9. A partir du tableau ci-dessous, estimer le transport de chaleur nécessaire à la latitude 50°N pour compenser le refroidissement radiatif entre 50°N et le pôle nord.

Latitude (°)	$D_\varphi(GWm^{-1})$	**Latitude (°)**	$D_\varphi(GWm^{-1})$
90	0	65	-1,380
85	-0,396	60	-1,403
80	-0,755	55	-1,331
75	-1,049	50	-1,164
70	-1,261	45	-0,905

Partie 3 : tourbillon potentiel quasi-géostrophique

On rappelle les équations quasi-géostrophiques de continuité, du tourbillon et de la thermodynamique dans le cadre « Boussinesq » et dans l'approximation du f-plan :

$$div\left(\overrightarrow{V_a}\right) + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

$$\frac{D_g}{Dt}\left(\xi_g\right) = -f_0 div\left(\overrightarrow{V_a}\right) \qquad \textbf{(2)}$$

$$\frac{D_g}{Dt}\left(\tilde{\theta}\right) = -\frac{\theta_0}{g} N_0^2 w \qquad \textbf{(3)}$$

$\overrightarrow{V_a}$: vent agéostrophique
w : vitesse verticale
ξ_g : tourbillon géostrophique
f_0 : paramètre de Coriolis
$\tilde{\theta}$: écart de température potentielle par rapport à l'atmosphère de référence
θ_0 : température potentielle moyenne de la troposphère (300K)

$N_0^2 = \frac{g}{\theta_0}\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial z}$: carré de la fréquence de Brunt-Vaïsala de l'atmosphère de référence

$$\frac{D_g}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_g \frac{\partial}{\partial x} + v_g \frac{\partial}{\partial y}$$

On rappelle également les formules de l'hydrostatisme, du vent géostrophique et de l'équilibre du vent thermique « Boussinesq » :

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \tilde{P}}{\partial z} = \frac{g}{\theta_0}\tilde{\theta} \qquad \textbf{(4)}$$

$$\overrightarrow{V_g} = \frac{1}{\rho_0 f_0}\vec{k} \times \vec{\nabla}_h\left(\tilde{P}\right) \qquad \textbf{(5)}$$

$$\frac{\partial \overrightarrow{V_g}}{\partial z} = \frac{g}{f_0\theta_0}\vec{k} \times \vec{\nabla}_h\left(\tilde{\theta}\right) \qquad \textbf{(6)}$$

1. Etablir l'expression tourbillon géostrophique ξ_g en fonction du laplacien horizontal de la pression $\Delta_h\left(\tilde{P}\right)$.

2. Démontrer l'égalité suivante :

$$\frac{D_g}{Dt}\left(\xi_g\right) = -f_0\left[\frac{D_g}{Dt}\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{g\tilde{\theta}}{\theta_0 N_0^2}\right)\right) + \left\{\frac{\partial u_g}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{g\tilde{\theta}}{\theta_0 N_0^2}\right) + \frac{\partial v_g}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{g\tilde{\theta}}{\theta_0 N_0^2}\right)\right\}\right]$$

3. Démontrer que le terme entre accolades est nul.

4. En déduire la conservation du tourbillon potentiel quasi-géostrophique :

$$\frac{D_g}{Dt}\left(f_0 + \frac{1}{\rho_0 f_0}\Delta_h\left(\tilde{P}\right) + \frac{f_0}{\rho_0 N_0^2}\frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial z^2}\right) = 0$$

PARTIE II

MÉTÉOROLOGIE GÉNÉRALE

Exercice 1 : Émagramme

Reproduire et compléter sur la copie le tableau suivant, en s'aidant de constructions graphiques sur un émagramme.

P (hPa)	T (°C)	T_d (°C)	r (g/kg)	r_w (g/kg)	H (%)	T'_w (°C)	θ (°C)	$θ'_w$ (°C)	Pc (hPa)	Tc (°C)
600	**-20**	**-27**								
	-3		**1,4**						**700**	
950							**10**	**6**		
	-1		**3**		**75**					

où **P** est la pression, **T** la température, $\mathbf{T_d}$ la température du point de rosée, **r** le rapport de mélange, $\mathbf{r_w}$ le rapport de mélange saturant, **H** l'humidité relative, $\mathbf{T'_w}$ la température pseudo-adiabatique du thermomètre mouillé, **θ** la température potentielle, $\mathbf{θ'_w}$ la température pseudo-adiabatique potentielle du thermomètre mouillé, **Pc** la pression du point de condensation et **Tc** la température du point de condensation.

Exercice 2 : Thermodynamique atmosphérique

Données :
Constante spécifique de l'air sec : R_a = 287 J kg^{-1} K^{-1}
Constante spécifique de la vapeur d'eau : R_v = 461,5 J kg^{-1} K^{-1}
Capacité thermique à pression constante de l'air sec : C_{pa} = 1005 J kg^{-1} K^{-1}

Pour toutes les questions de 1 à 4, faire les calculs (ne pas utiliser l'émagramme excepté pour vérifier si le résultat est cohérent).
Pour les questions 5 et 6, vous devez utiliser l'émagramme.

On évalue la pression de vapeur d'eau saturante e_w (en hPa) en fonction de la température T (en °C) par la formule empirique de Tétens :

$$e_w(T) = 6{,}107 \times 10^{\frac{7{,}5 \times T}{237{,}3 + T}}$$

On considère une particule d'air atmosphérique de pression 900 hPa, de température 21 °C et dont le rapport de mélange r est de 9 g/kg.

1) Calculer sa température potentielle θ en °C.

2) Exprimer la pression de vapeur e en fonction du rapport de mélange r, de la pression P et des constantes spécifiques R_a et R_v puis la calculer (en hPa).

3) Calculer son humidité relative H en %.

4) En utilisant la formule empirique de Tétens, exprimer la température du point de rosée en fonction de la pression de vapeur e puis la calculer (en °C).

5) Quelle température cette particule d'air devrait-elle atteindre lors d'un refroidissement isobare pour obtenir la condensation de 1 g de vapeur par kg d'air sec ?

6) Quel niveau de pression cette particule d'air devrait-elle atteindre au cours d'une ascendance pour obtenir la condensation de 2 g de vapeur par kg d'air sec ?

Exercice 3 : Radiosondage à Paris

Un radiosondage, effectué à la fin d'une chaude journée à Paris, a permis de dresser le tableau suivant regroupant des mesures de pression P, de température T et de température de point de rosée T_d à partir du sol.

P (hPa)	1000	900	800	700	600	500	400	300	200
T (°C)	35	27	18	8	3	-2	-12	-25	-31
T_d (°C)	19	10	9	5,5	-1	-2	-12	-25	-45

On désigne par θ'_w la température pseudo-adiabatique potentielle du thermomètre mouillé et T'_w la température pseudo-adiabatique du thermomètre mouillé.

1) Sur l'émagramme, positionner les températures de point de rosée avec des croix noires, tracer en rouge la courbe d'état de ce radiosondage et en bleu la courbe reliant les points de coordonnées P et T'_w.

2) Si des couches peuvent générer une formation nuageuse, préciser, la base et le sommet de ces nuages à l'aide d'un schéma sur l'émagramme, en précisant les différents types de nuages formés (stratiforme, cumuliforme).

3.a) Définir les notions de CAPE (Convective Available Potential Energy) et de CIN (Convective INhibition).

b) En quelle unité s'expriment la CAPE et la CIN ?

c) Matérialiser sur l'émagramme la surface proportionnelle à la CAPE par des hachures rouges et la surface proportionnelle à la CIN par des hachures bleues.

d) Estimer la valeur numérique de la CAPE, en utilisant la correspondance surface/énergie figurant dans le cartouche de l'émagramme.

e) À partir de l'équation d'évolution de la vitesse verticale, démontrer la relation existante entre la CAPE et la vitesse verticale maximale théorique susceptible d'apparaître dans une ascendance convective. Énumérer toutes les hypothèses nécessaires pour arriver à ce résultat. Cette vitesse verticale maximale théorique est-elle réaliste ?

f) Déterminer la valeur de cette vitesse verticale maximale théorique à partir de l'estimation de la valeur numérique de la CAPE (question 3.d).

PARTIE III

Couche Limite

Réchauffement de la couche limite atmosphérique diurne

L'équation d'évolution de la température potentielle dans le système de Reynolds, sans apport externe de chaleur s'écrit :

$$\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial t} + \overline{u_k}\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_k} = \nu_\theta \frac{\partial^2 \overline{\theta}}{\partial x_k \partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k}\overline{u'_k \theta'} \quad (1)$$

avec θ la température potentielle, u_k les composantes du vent dans la convention d'Einstein, ν_θ le coefficient cinématique d'échange moléculaire pour la chaleur, t le temps.

1) Pour une variable quelconque notée x, rappeler la signification et la définition de l'opérateur moyenne noté $\overline{x}$.
2) Enoncer les axiomes de Reynolds.
3) Décrire chacun des termes de l'équation 1.

Dans la couche limite atmosphérique (CLA) convective, l'équation (1) peut s'écrire :

$$\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z}\overline{w'\theta'} \quad (2)$$

4) Quelles sont les hypothèses utilisées permettant d'obtenir l'équation 2 ?
5) Montrer que dans une CLA convective stationnaire, le flux cinématique turbulent moyen de température potentielle $\overline{w'\theta'}$ est linéaire.
6) Déterminer la valeur du flux de chaleur sensible en surface si le flux cinématique turbulent moyen reste nul à $z = 1$ km et si la CLA se réchauffe de 5 K en 3 h et possède une masse volumique en surface de $\rho = 1.2$ $kg.m^{-3}$. On rappelle que la capacité calorifique à pression constante de l'air est $C_p = 1005$ $J.kg^{-1}K^{-1}$.

Couche limite de surface

Dans une couche limite atmosphérique neutre, on considère deux surfaces différentes :
a) une zone urbaine dense avec des bâtiments de taille moyenne de 20 m, soit une hauteur de déplacement $z_d = 15$ m et $z_0 = 0.9$ m,
b) une zone rurale avec $z_0 = 0.2$ m.

7) Exprimer le vent moyen près de la surface en fonction de $u_\star$, z, z_d, et z_0. Rappeler la signification de $u_\star$ et z_0.
8) Avec $u_\star = 0.4$ $m.s^{-1}$, calculer la vitesse du vent moyen à une altitude z = 20 m pour les deux surfaces. Comparer les valeurs obtenues si on ne tient pas compte de la hauteur des bâtiments en ville.
9) La théorie de similitude de Monin-Obukhov généralise l'expression du gradient vertical du vent moyen proche de la surface à l'aide d'une fonction ϕ_u. Rappeler l'expression de $\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}$ en fonction de ϕ_u.
10) Dans la CLA stable, au voisinage de la neutralité, on suppose l'approximation suivante : $\phi_u = C_1 + C_2\frac{z}{L_{MO}}$ avec C_1 et C_2 des constantes et L_{MO} la longueur de Monin-Obukhov : $L_{MO} = \frac{-u_\star^3}{\beta\kappa Q_0}$ avec $\beta = g/\theta_0$, κ la constante de Von Karman et Q_0 le flux de chaleur à la surface.
- Quelle est l'unité de Q_0 ?
- Exprimer le vent u(z) dans la CLA stable en fonction de C_1 , C_2 , κ , Q_0 , β , z_0 et $u_\star$.